

## **ΔΙΑΤΡΙΒΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ ΜΑΣΤΕΡ**

*Μεταβλητότητα του Γενικού Δείκτη Χρηματιστηρίου Αξιών  
Τα υποδείγματα μεταβλητότητας, περιγραφή , υπολογισμός  
της μεταβλητότητας της επόμενης ημέρας και σύγκριση με  
βασικά υποδείγματα.*

ΚΩΝΣΤΑΝΤΙΝΟΣ ΚΑΚΑΝΗΣ

Επιβλέπων: ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ ΜΠΑΛΙΟΣ

ΛΕΥΚΩΣΙΑ, ΜΑΪΟΣ, 2014

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Α : ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ**

1. Εισαγωγή
2. Δεδομένα

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Β : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ – ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

- 1.1 Παχιές Ουρές (Thick tails)
- 1.2 Συσσώρευση μεταβλητότητας (Volatility clustering)
- 1.3 Επιστροφή στο μέσο (Mean Reversion)
- 1.4 Μόχλευση (Leverage effect)
- 1.5 Ροή πληροφοριών (Information arrivals)

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Γ: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ, ΣΧΕΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ**

1. Ιστορική μεταβλητότητα
2. Υπόδειγμα εκθετικού σταθμισμένου κινητού μέσου όρου - EWMA

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Δ : ΤΕΚΜΑΡΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ (Implied Volatility)**

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Ε: ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗΣ ΕΤΕΡΟΣΚΕΔΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑΣ**

1. Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα - ARCH
2. Γενικευμένο Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα GARCH(p,q)
3. Άλλα σημαντικά υποδείγματα μορφής ARCH/GARCH – EGARCH και TARCH

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Ζ: ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ARCH, ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΙ GARCH**

1. Έλεγχος για ARCH και υπολογισμός GARCH (1,1)
2. Υπολογισμός με TARCH
3. Υπολογισμός με EGARCH

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Η : ΠΡΟΒΛΕΠΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ**

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Θ : ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ**

### **ΕΝΟΤΗΤΑ Ι : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΕΠΙΛΟΓΟΣ**

1. Κριτική των υποδειγμάτων – Πλεονεκτήματα Μειονεκτήματα
2. Αντιπαράθεση των υποδειγμάτων
3. Επίλογος

### **ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ**

### **ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ**

## ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ

- Γράφημα 1. Κίνηση του Γενικού Δείκτη Χ.Α.Α.
- Γράφημα 2. Λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη
- Γράφημα 3. Στατιστικά στοιχεία
- Γράφημα 4. Αυτοσυσχέτιση αποδόσεων
- Γράφημα 5. Αυτοσυσχέτιση των τετραγώνων των λογαριθμικών αποδόσεων
- Γράφημα 6. Αποδόσεις στο τετράγωνο – σύγκριση με την κίνηση του δείκτη
- Γράφημα 7. Τεκμαρτή μεταβλητότητα, το <<χαμόγελο>> της μεταβλητότητας
- Γράφημα 8. Κατάλοιπα παλινδρόμησης
- Γράφημα 9. Δεσμευμένη Ετεροσκεδαστικότητα.

- Πίνακας 1. Ιστορική μεταβλητότητα 30 ημερών
- Πίνακας 2. Μεταβλητότητα 30 ημερών με το υπόδειγμα EWMA
- Πίνακας 3. Παλινδρόμηση AR(1).
- Πίνακας 5. Διαγνωστικός έλεγχος αυτοσυσχέτισης
- Πίνακας 6. Διαγνωστικός έλεγχος ετεροσκεδαστικότητας
- Πίνακας 7. Υπολογισμός GARCH (1,1)
- Πίνακας 8. Υπολογισμός GARCH(1,1) με t-student κατανομή
- Πίνακας 9. Υπολογισμός GARCH(1,1) με GED κατανομή
- Πίνακας 10. Υπολογισμός TARCH
- Πίνακας 11. Υπολογισμός EGARCH
- Πίνακας 12. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα κινητού μέσου
- Πίνακας 13. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα EWMA
- Πίνακας 14. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα GARCH(1,1)
- Πίνακας 15. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα TARCH
- Πίνακας 16. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα EGARCH.
- Πίνακας 17. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα – σύγκριση
- Πίνακας 18. Συγκριτική έρευνα υποδειγμάτων από βιβλιογραφία

## ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Το βασικό αντικείμενο ανάλυσης αυτής της εργασίας είναι η μεταβλητότητα και η προβλεπτική ικανότητα των υποδειγμάτων που την περιγράφουν. Γίνεται αναφορά και παρουσίαση κάποιων από τις στατιστικές ιδιότητες της μεταβλητότητας τις οποίες φιλοδοξούν να αναπαράγουν τα υποδείγματα της μεταβλητότητας. Τα δεδομένα που χρησιμοποιούνται είναι από τον Γενικό Δείκτη του Χρηματιστηρίου Αξιών Αθηνών και με βάση αυτά γίνεται προσπάθεια υπολογισμού και σύγκρισης για την ανάδειξη του υποδείματος που πραγματοποιεί την ακριβέστερη πρόβλεψη. Το υπόδειγμα GARCH (1,1) αναδεικνύεται ως το επικρατέστερο με βάση τα δεδομένα του Γενικού δείκτη. Τέλος, γίνεται αναφορά στην στοχαστική μεταβλητότητα και μια κριτική ανάλυση των υποδειγμάτων της μεταβλητότητας.

## **ΕΝΟΤΗΤΑ Α : ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΑ**

## 1.ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Κάθε οικονομικός αναλυτής ή ακόμη και ένας φοιτητής της χρηματοοικονομικής μπορεί να αντιληφθεί πόσο σημαντικός είναι ο υπολογισμός και η εκτίμηση της μεταβλητότητας ενός χρηματοοικονομικού στοιχείου. Η μεταβλητότητα είναι απαραίτητη για την τιμολόγηση των παράγωγων προϊόντων, οι εκτιμήσεις αυτής χρησιμοποιούνται στην τεχνική διαχείρισης κινδύνων, στον υπολογισμό της αξίας χαρτοφυλακίου υπό κίνδυνο (Value at Risk), στην θεωρία για την επιλογή και κατανομή ενός χαρτοφυλακίου επενδύσεων, ακόμη και οι κυβερνήσεις των χωρών ενδιαφέρονται για την μεταβλητότητα των αγορών λόγω του φαινομένου της μετάδοσης από αγορά σε αγορά (contagious effects). Γενικότερα η μεταβλητότητα μπορεί να αποδοθεί με διαφορετικές λέξεις ως αστάθεια ή κινητικότητα και είναι για την χρηματοοικονομική επιστήμη ο κίνδυνος που ενέχει μια χρηματοοικονομική επένδυση ή δραστηριότητα. Για τον υπολογισμό και την εκτίμηση της μεταβλητότητας υπάρχουν διαφορετικά υποδείγματα τα οποία χρησιμοποιούν διαφορετικές μεθόδους εκτίμησης αυτής και παράγουν διαφορετικά αποτελέσματα. Αρκετή συζήτηση έχει αναπτυχθεί για το κατά πόσο η μεταβλητότητα μπορεί να εκτιμηθεί επαρκώς ή όχι και ποιο υπόδειγμα μπορεί να την προβλέψει καλύτερα.

Στην εργασία αυτή θα αναλύσουμε τα διάφορα υποδείγματα της μεταβλητότητας , θα δείξουμε κάποια τυποποιημένα-εμπειρικά δεδομένα που ισχύουν για αυτή και κατά πόσο ισχύουν για το Γενικό δείκτη του Χρηματιστηρίου Αθηνών. Χρησιμοποιώντας τα δεδομένα του ΓΔ θα δείξουμε ποιο από τα υποδείγματα ισχύει, ποιο προβλέπει την μεταβλητότητα καλύτερα και θα την υπολογίσουμε με το υποδείγματα δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας GARCH(1,1). Τέλος, θα επιχειρήσουμε μια γενικότερη κριτική των υποδειγμάτων μεταβλητότητας που χρησιμοποιούνται.

Με πιο απλά λόγια η μεταβλητότητα είναι ένα μέτρο της αβεβαιότητας για την απόδοση που θα έχει μια επένδυση. Για να πάρουμε μια πρώτη εικόνα της μεταβλητότητας θα παρουσιαστεί ένα γράφημα του ΓΔ και είναι μια καλή ευκαιρία για να παρουσιαστούν τα δεδομένα που θα χρησιμοποιηθούν σε αυτή την εργασία.

## 2. ΔΕΔΟΜΕΝΑ

Σε αυτή την εργασία θα χρησιμοποιηθούν δεδομένα δεκαετίας του Γενικού Δείκτη (ΓΔ) τιμών του χρηματιστηρίου Αθηνών το οποίο έχει παίξει σημαντικό ρόλο στην

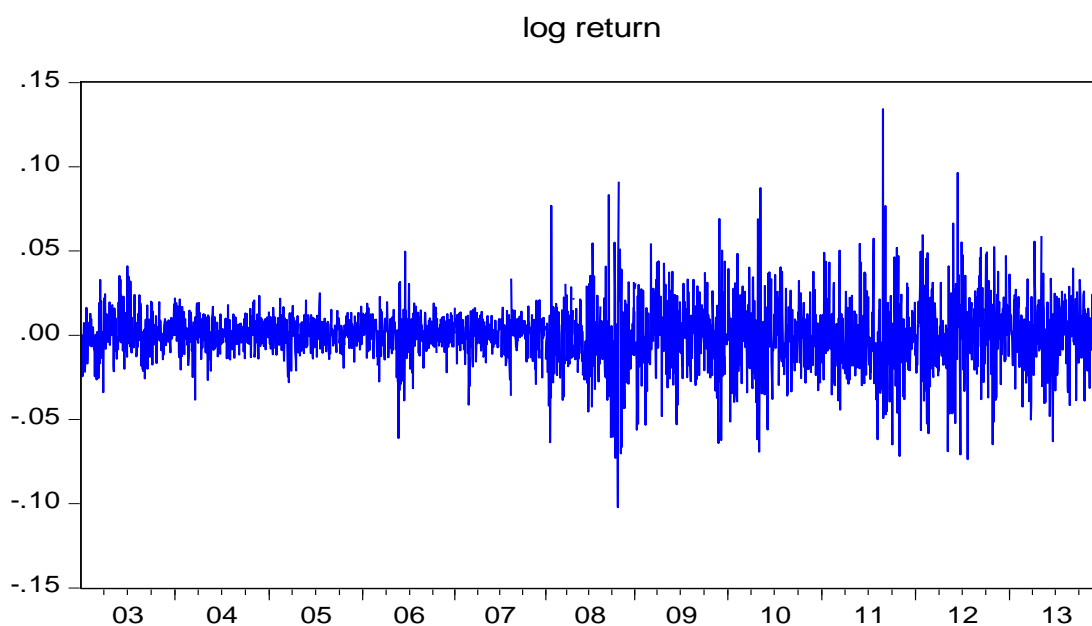
οικονομική ανάπτυξη της Ελλάδας . Η χρονολογική σειρά των δεδομένων είναι 2835 ημερήσιες τιμές κλεισίματος του ΓΔ. Συγκεκριμένα από τον Ιανουάριο του 2003 έως και τον Δεκέμβριο του 2013. Αξίζει να σημειωθεί ότι η ανάλυση είναι μετά την μεγάλη πτώση του 1999. Ακολουθεί το πρώτο γράφημα του ΓΔ το οποίο παράχθηκε στο οικονομετρικό πρόγραμμα E-Views και είναι το κύριο πρόγραμμα που θα χρησιμοποιηθεί για την ανάλυση.



Γράφημα 1. Κίνηση του Γενικού Δείκτη X.A.A.

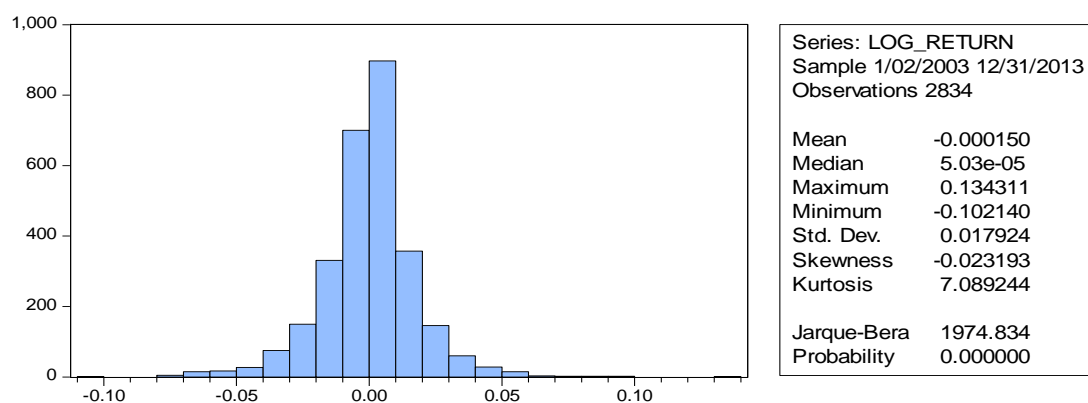
Με μια πρώτη ματιά από την γραφική απεικόνιση μπορεί να γίνει αντιληπτό ότι η χρονολογική σειρά του ΓΔ δεν είναι στάσιμη (stationary) , δηλαδή ο μέσος η διακύμανση και συνδιακύμανση μεταβάλλονται με τον χρόνο. (Μια χρονολογική σειρά λέγεται στάσιμη εάν δεν υπάρχει συστηματική αλλαγή του μέσου όρου και της διασποράς της στο χρόνο). Για το σκοπό αυτό θα γίνει επίσης έλεγχος για μοναδιαία ρίζα (ADF-Augmented Dickey Fuller test). Από τα αποτελέσματα του ελέγχου είναι εμφανές ότι δεν υπάρχει στασιμότητα , οι απόλυτες τιμές των t-statistic είναι μικρότερες από την κριτική τιμή και το p-value μεγαλύτερο από 5% (Παράρτημα). Η στασιμότητα είναι πολύ σημαντική έννοια καθώς είναι απαραίτητη προϋπόθεση για τα περισσότερα εργαλεία της ανάλυσης χρονολογικών σειρών καθώς αν η σειρά δεν είναι στάσιμη μπορεί καταλήξουμε σε πρόβλημα γνωστό ως spurious regression.. Η λύση σε αυτό το πρόβλημα είναι να μετατραπούν τα δεδομένα σε στάσιμα και αυτό γίνεται υπολογίζοντας την λογαριθμική απόδοση του ΓΔ, δηλαδή  $r_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ . Η

γραφική απεικόνιση που ακολουθεί με μια ματιά δείχνει ότι η χρονολογική σειρά των λογαριθμικών αποδόσεων δείχνει να είναι στάσιμη. Το ίδιο φαίνεται και από τον έλεγχο για μοναδιαία ρίζα (ADF-Augmented Dickey Fuller test) από τα αποτελέσματα του οποίου είναι εμφανές ότι υπάρχει στασιμότητα. Η απόλυτη τιμή των t-statistic είναι μεγαλύτερη από την κριτική τιμή και το p-value μικρότερο από 5% (Παράρτημα).



Γράφημα 2. Λογαριθμικές αποδόσεις του δείκτη.

Αυτό που κάνουν κάποια υποδείγματα μεταβλητότητας που θα παρουσιαστούν είναι να εξηγήσουν και να προβλέψουν τις παραπάνω αποδόσεις. Στη συνέχεια ακολουθεί ένα ιστόγραμμα και άλλα στατιστικά των αποδόσεων  $r_t$  τα οποία θα σχολιαστούν πιο λεπτομερώς στο επόμενο κεφάλαιο. Αυτό που μπορεί να υπωθεί είναι ότι το ιστόγραμμα πλέον προσομοιάζει με κανονική κατανομή σε σχέση με αυτό του ΓΔ παρόλο που το p-value του Jarque-Berra είναι μικρότερο του 5% .



Γράφημα 3. Στατιστικά στοιχεία



## **ΕΝΟΤΗΤΑ Β : ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΑ – ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ**

## ΕΜΠΕΡΙΚΑ – ΤΥΠΟΠΟΙΗΜΕΝΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ ΧΡΟΝΟΛΟΓΙΚΩΝ ΣΕΙΡΩΝ

Τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών πολλών ετών πάνω σε χρηματοοικονομικές χρονολογικές σειρές καταλήγουν σε κάποιες κοινές στατιστικές ιδιότητες που παρουσιάζουν οι τιμές ή αποδόσεις αυτών. Ένα καλό υπόδειγμα θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει αυτές τις ιδιότητες. Παρόλα αυτά, είναι πολλές φορές αδύνατο όλα τα εμπειρικά στατιστικά ευρήματα να αποδίδονται μέσα από ένα μόνο υπόδειγμα λόγω της πολυπλοκότητας να εκφραστούν όλα στο ίδιο υπόδειγμα. Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν οι σημαντικότερες από αυτές τις ιδιότητες όπως έχουν αποτυπωθεί από την διεθνή έρευνα και βιβλιογραφία:

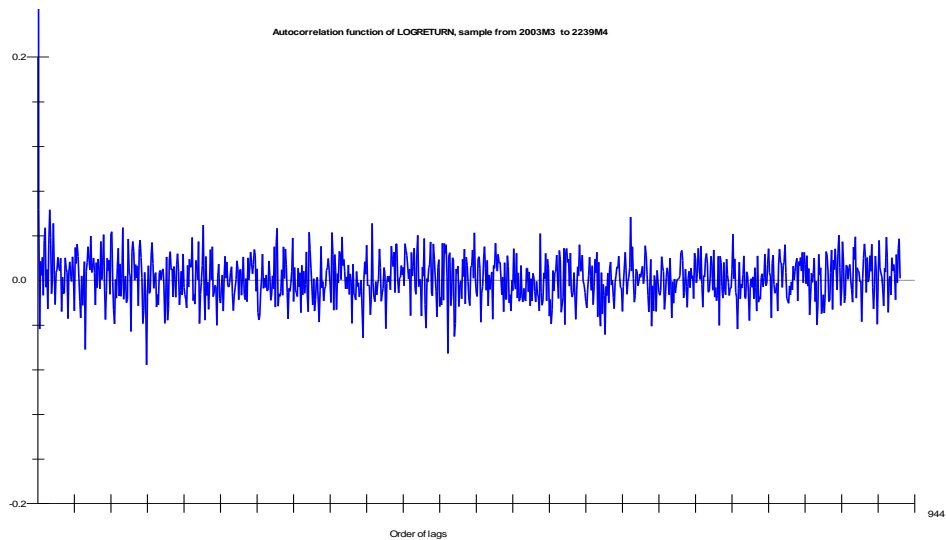
### 1) Παχιές Ουρές (Thick tails)

Από πολύ νωρίς είχε σημειωθεί από τον Mandelbrot (1963) ότι οι αποδόσεις των οικονομικών αγαθών ακολουθούν λεπτόκυρτες κατανομές. Αυτό σημαίνει ότι οι αποδόσεις έχουν μεγαλύτερη κυρτότητα (kurtosis) (συνήθως πάνω από πέντε, το οποίο προκαλεί και τις παχιές ουρές) και αρνητική έκταση ασυμμετρίας (skewness) (η οποία μετακινεί την κατανομή προς την μια πλευρά, δηλαδή τάση για αρνητικές αποδόσεις, συγκρινόμενη με μια κανονική κατανομή (Gaussian distribution)  $N(0,1)$  με κυρτότητα τρία και έκταση ασυμμετρίας μηδέν). Η ιδιότητα αυτή έχει μελετηθεί μεταξύ άλλων και από τους Fielitz and Rozelle (1983) και τους Akigary and Booth (1989). Αυτές τις ιδιότητες μπορούμε να τις παρατηρήσουμε από το γράφημα τρία όπου η κυρτότητα είναι 7,089244 (μεγαλύτερη από τρία και πέντε) και η έκταση ασυμμετρίας είναι αρνητική μείον 0,023193. Επίσης, αν παρατηρήσουμε την στατιστική Jarque Berra εμφανίζει πολύ υψηλή τιμή 1974,834 και p-value (0,00) οι τιμές των οποίων είναι ενδείξεις για μη κανονική κατανομή. Ως συμπέρασμα εκεί που καταλήγουν οι έρευνες είναι ότι η πιθανότητα ότι ακραία γεγονότα μπορεί να συμβούν είναι μεγαλύτερη από αυτή της κανονικής κατανομής.

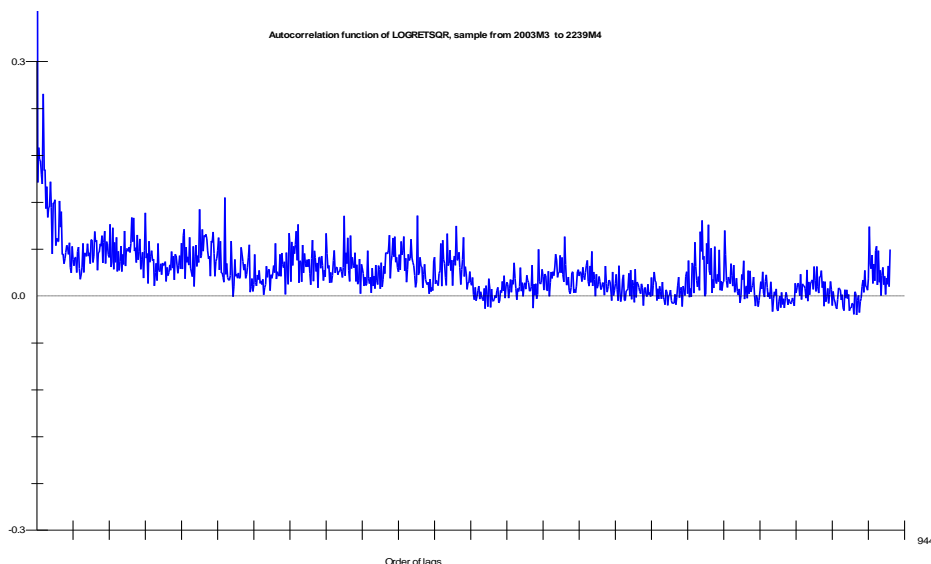
### 2) Συσσώρευση μεταβλητότητας (Volatility clustering)

Ο Mandelbrot (1963) αλλά και αργότερα ο Fama (1965) έχουν αναφέρει ότι υπάρχουν περίοδοι με υψηλή και χαμηλή μεταβλητότητα, δηλαδή ότι μεγάλες μεταβολές στην τιμή ή απόδοση ακολουθούνται από άλλες μεγάλες αλλαγές ή και το αντίθετο ότι δηλαδή μικρές αλλαγές ακολουθούνται από μικρές αλλαγές. Αυτή η επιμονή της μεταβλητότητας σε συστάδες μας δείχνει ότι ενδεχομένως να υπάρχει θετική συσχέτιση και αυτό θα το δούμε με δύο γραφήματα αυτοσυσχέτισης (ACF)

χρησιμοποιώντας τα δεδομένα μας (Microfit). Θα δούμε ένα γράφημα των λογαριθμικών αποδόσεων και ένα γράφημα αυτοσυσχέτισης των τετραγώνων των λογαριθμικών αποδόσεων το οποίο δείχνει ότι υπάρχει μια δομή στη διακύμανση των αποδόσεων. Το δεύτερο γράφημα το οποίο διαφέρει από το πρώτο μας δείχνει την συσσώρευση της μεταβλητότητας καθώς υπάρχει σημαντική συσχέτιση και φαίνεται η αργή μείωση της αυτοσυσχέτισης, το πρόσημο των αποδόσεων δεν είναι γνωστό αλλά το μέγεθος της αλλαγής δείχνει μια συσχέτιση.



Γράφημα 4. Αυτοσυσχέτιση αποδόσεων



Γράφημα 5. Αυτοσυσχέτιση των τετραγώνων των λογαριθμικών αποδόσεων.

Παρόλα αυτά η μετάβαση από την μια κατάσταση στην άλλη δεν είναι προβλέψιμη. Το υπόδειγμα ARCH που παρουσιάστηκε από τον Engle (1982) και οι διάφορες προεκτάσεις και διαφοροποιήσεις του που ακολούθησαν, καθώς και τα υποδείγματα

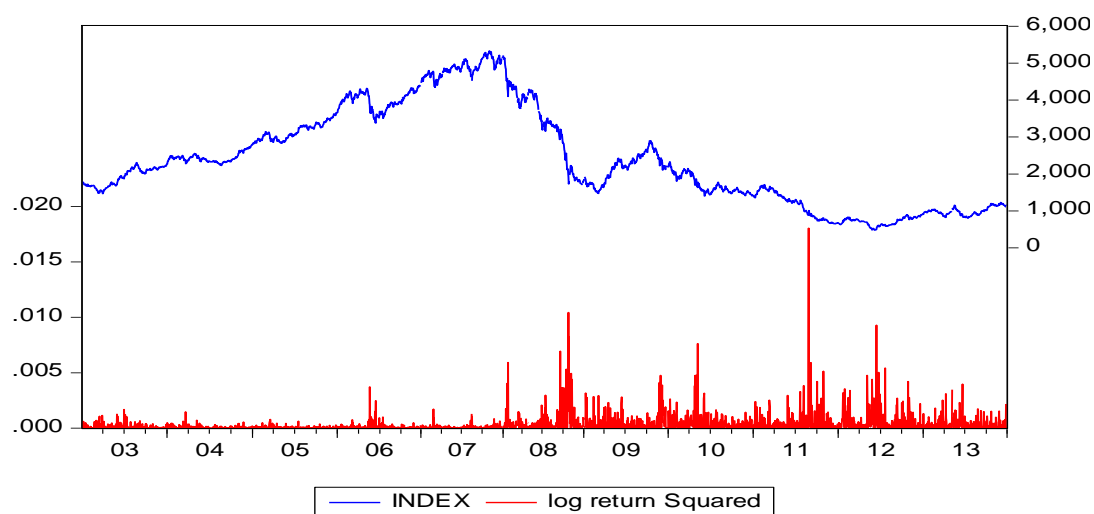
στοχαστικής μεταβλητότητας στην ουσία αναπτύχθηκαν για να συμπεριλάβουν το φαινόμενο της συσσώρευσης της μεταβλητότητας.

### 3) Επιστροφή στο μέσο (Mean Reversion)

Από την προηγούμενη ιδιότητα μπορούμε να καταλάβουμε ότι κάποιες φορές θα υπάρχει μεγάλη κινητικότητα (μεταβλητότητα) και κάποιες όχι. Δηλαδή, μακροπρόθεσμα υπάρχει ένα <<κανονικό>> επίπεδο μεταβλητότητας στο οποίο θα συγκλίνει η μεταβλητότητα. Επομένως, η μεταβλητότητα μπορεί να θεωρηθεί ως στάσιμη μεταβλητή (stationary) σε ένα μακροπρόθεσμο ορίζοντα.

### 4) Μόχλευση (Leverage effect)

Ο Black (1976) σε μια εμπειρική του έρευνα δείχνει ότι υπάρχει αρνητική συσχέτιση μεταξύ των τιμών των μετοχών ή των αποδόσεων των μετοχών και της μεταβλητότητας. Πιο συγκεκριμένα, μια αρνητική μεταβολή των αποδόσεων προκαλεί μεγαλύτερη μεταβλητότητα από ότι μια ισόποση θετική μεταβολή. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί από την ανάγκη για αποστροφή στον κίνδυνο, δηλαδή καθώς η τιμή μιας μετοχής πέφτει αυτό έχει ως συνέπεια την αύξηση της δανειακής της επιβάρυνσης (leverage) και αυτό ενέχει περισσότερο κίνδυνο για τον επενδυτή και άρα μεγαλύτερη μεταβλητότητα. Αυτό μπορούμε να το δούμε στο παρακάτω γράφημα αν υψώσουμε στο τετράγωνο τις λογαριθμικές αποδόσεις ώστε να μην έχουμε αρνητικές αποδόσεις και το συγκρίνουμε με την πορεία του δείκτη. Είναι εμφανές ότι κατά την πτωτική κίνηση του δείκτη οι λογαριθμικές αποδόσεις στο τετράγωνο είναι μεγαλύτερες σε σχέση με αυτές κατά την ανοδική κίνηση.



Γράφημα 6. Αποδόσεις στο τετράγωνο – σύγκριση με την κίνηση του δείκτη

## 5) Ροή πληροφοριών (Information arrivals)

Πολλοί ερευνητές συνδέουν τις αποδόσεις με την ροή γνωστοποίησης πληροφοριών όπως αυτές τις αντιλαμβάνεται ο κάθε επενδυτής διαφορετικά. Στην πράξη η μεταβλητότητα έχει συνδεθεί με τον όγκο των συναλλαγών Harris (1986) , με τις ημερομηνίες ανακοίνωσης μερισματικών αποδόσεων και μακροοικονομικών δεδομένων Cornel (1978) και Harvey and Huang (1992) καθώς και με άλλες ανακοινώσεις που ανάλογα με την βαρύτητα τους επηρεάζουν την κινητικότητα των αποδόσεων.

Οι παραπάνω στατιστικές ιδιότητες είναι κάποιες από αυτές που προσπαθούν τα υποδείγματα να συμπεριλάβουν ώστε να μπορούν να εξηγούν την μεταβλητότητα. Επιπλέον πληροφορίες μπορεί κάποιος να ανατρέξει στην εργασία Stylised facts and statistical properties Rama Cont (2001). Η ανάλυση αυτή θα ξεκινήσει από τον υπολογισμό της μεταβλητότητας με απλά υποδείγματα και θα συνεχίζει με πιο πολύπλοκα κατά την ροή της. Στην συνέχεια , η πιο απλή μορφή αυτής : Η ιστορική μεταβλητότητα.

**ΕΝΟΤΗΤΑ Γ: ΙΣΤΟΡΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ, ΣΧΕΤΙΚΑ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ**

## 1. Ιστορική μεταβλητότητα

Αρχικά θα γίνει αναφορά σε απλά υποδείγματα όπου χρησιμοποιείται η απλή ιστορική μεταβλητότητα δηλαδή η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των αποδόσεων του δείκτη. Συνήθως χρησιμοποιούνται πρόσφατα δεδομένα και είναι ένα απλό στατιστικό υπόδειγμα το οποίο μετράει το πόσο απομακρυσμένη είναι η κάθε απόδοση από τον μέσο όρο της απόδοσης. Αυτά τα υποδείγματα θεωρούν ότι η μεταβλητότητα είναι σταθερή (ή αδέσμευτη).

Το πιο απλό υπόδειγμα είναι η μεταβλητότητα τριάντα ημερών και θα παρουσιαστεί παρακάτω για τις παρατηρήσεις από 15/11/2013 έως 30/12/2013 του ΓΔ (ένα δείγμα των τελευταίων 30 ημερών). Για τον υπολογισμό χρησιμοποιείται η λογαριθμική απόδοση. Ο πιο απλός τύπος που υπολογίζει την ιστορική μεταβλητότητα είναι :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{n-1}^2$$

Με βάση τον παραπάνω τύπο η μεταβλητότητα των τριάντα ημερών είναι ο μέσος όρος των λογαριθμικών αποδόσεων υψωμένη στο τετράγωνο και αυτό γίνεται επειδή υπολογίζουμε ότι για μικρά χρονικά διαστήματα ο μέσος όρος των λογαριθμικών αποδόσεων είναι πολύ κοντά στο μηδέν  $\bar{r} \approx 0$  (m = αριθμός των παρατηρήσεων).

Date	Γεν Δείκτης	log return r	Log return Squared
15/11/2013	1133,46	0,69%	0,00%
18/11/2013	1141,33	0,33%	0,00%
19/11/2013	1145,09	-0,74%	0,01%
20/11/2013	1136,65	0,45%	0,00%
21/11/2013	1141,83	2,34%	0,05%
22/11/2013	1168,90	2,44%	0,06%
»	»	»	»
24/12/2013	1112,08	4,67%	0,22%
27/12/2013	1165,24	-0,62%	0,00%
30/12/2013	1158,03	0,40%	0,00%
31/12/2013	1162,68		
		Sum/30	0,03%
		Std. Deviation (σ)	1,72%
		Annual St D	27,27%

Πίνακας 1. Ιστορική μεταβλητότητα 30 ημερών.

Η ημερήσια ιστορική μεταβλητότητα τριάντα ημερών όπως φαίνεται και από τον πίνακα είναι 1,72% ενώ η ετήσια 27,27%. Ο τύπος που μας δίνει την διακύμανση και την τυπική απόκλιση δηλαδή ένα μέτρο της μεταβλητότητας είναι ο παρακάτω :

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{m-1} \sum_{i=1}^m (r_{n-i} - \bar{r})^2$$

$$\bar{r} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m r_{n-i}$$

και αν υπολογίζαμε την μεταβλητότητα με αυτό τον τύπο θα είχαμε σχεδόν το ίδιο αποτέλεσμα, πιο συγκεκριμένα η τυπική απόκλιση είναι 1,75% και η ετήσια μεταβλητότητα 27,74%. (Παράρτημα 2). Στο υπόδειγμα αυτό το οποίο ονομάζεται υπόδειγμα ιστορικού μέσου όρου χρησιμοποιούνται οι τριάντα τελευταίες ιστορικές παρατηρήσεις και το ίδιο βάρος δίνεται σε όλες τις παρατηρήσεις. Αν  $\hat{\sigma}_t$  είναι η πρόβλεψη της μεταβλητότητας τότε ένα υπόδειγμα ιστορικού μέσου όρου θα μπορούσε να εκφραστεί με τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{\sigma}_t = \frac{(\sigma_{t-1} + \sigma_{t-2} + \dots + \sigma_t)}{\tau}$$

Όπου  $\sigma_t$  είναι η τυπική απόκλιση του δείγματος για  $\tau$  περιόδους. Αν υπολογίζαμε την ιστορική μεταβλητότητα όλων των παρατηρήσεων της δεκαετίας τότε η ημερήσια είναι 1,79% και η ετήσια 28,34%.

Ένα άλλο υπόδειγμα που χρησιμοποιεί ιστορικά δεδομένα είναι αυτό του τυχαίου περιπάτου (Random walk) με μηδενική μνήμη στην χρονική εξέλιξη το οποίο μπορεί να εκφραστεί ως  $\hat{\sigma}_t = \sigma_{t-1}$  ή και με ύπαρξη μνήμης σε περιορισμένα χρονικά διαστήματα με τις μαρκοβιανές διαδικασίες. Στην συνέχεια θα υπολογίσουμε την μεταβλητότητα με μια από αυτές τις διαδικασίες χρησιμοποιώντας τα ιστορικά στοιχεία τριάντα ημερών που χρησιμοποιήσαμε πριν. Ακολουθώντας το βιβλίο του Hull (2003) κεφάλαιο 12, η τιμή μιας μετοχής  $S$  ή του δείκτη και η απόδοση αυτής  $\frac{dS}{S}$  ακολουθούν μια γεωμετρική κίνηση κατά Brown δηλαδή  $\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma dW$ . Το οποίο είναι ένα υπόδειγμα που περιγράφει την κίνηση του δείκτη στον χρόνο, όπου  $S$  είναι η τιμή του δείκτη,  $\mu$  είναι ένα μέτρο του μέσου ρυθμού κίνησης της τιμής του δείκτη,  $dt$  είναι ο χρόνος,  $dW$  είναι η γνωστή διαδικασία - ανέλιξη Wiener η οποία



ακολουθεί την κανονική κατανομή  $N(0, dt)$  και  $\sigma$  είναι η μεταβλητότητα η οποία είναι σταθερή στον χρόνο. Η μεταβλητή  $\sigma$  είναι αυτή που θέλουμε να εκτιμήσουμε με το παραπάνω υπόδειγμα. Σε διακριτό χρόνο η παραπάνω εξίσωση είναι :  $\delta S = \mu S \delta t + \sigma S \varepsilon \sqrt{\delta t}$  όπου  $\varepsilon$  είναι μια τυχαία παρατήρηση από την κανονική κατανομή  $\varepsilon \sim N(0,1)$  και  $\frac{\delta S}{S} \sim N(\mu \delta t, \sigma \sqrt{\delta t})$  ,  $\log \frac{S_{t+\delta t}}{S_t} \sim N((\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) \delta t, \sigma \sqrt{\delta t})$

Από την παραπάνω εξίσωση αν υποθέσουμε 250 μέρες διαπραγμάτευσης μπορούμε να έχουμε μια εκτίμηση της ετήσιας μεταβλητότητας η οποία είναι  $\sigma \sqrt{\delta t} = 0,0172 \sqrt{252} = 0,2730$  ή 27,30%.

## 2. Υπόδειγμα εκθετικού σταθμισμένου κινητού μέσου όρου - EWMA

Μια παραλλαγή υπολογισμού του ιστορικού μέσου όρου και του κινητού μέσου όρου που υπολογίστηκε παραπάνω είναι η μέθοδος σταθμισμένου μέσου όρου όπου μεγαλύτερο βάρος δίνεται στις πιο πρόσφατες παρατηρήσεις. Ένα τέτοιο υπόδειγμα εκφράζεται ως:  $\hat{\sigma}_t = \sum_{i=t-\tau}^{t-1} \lambda \sigma_i$  και  $\lambda$  είναι το βάρος (ποσοστό) που δίνεται σε κάθε πιο πρόσφατη παρατήρηση. Το πιο γνωστό υπόδειγμα αυτής της μορφής είναι αυτό του εκθετικού σταθμισμένου κινητού μέσου όρου (EWMA - Exponentially Weighted Moving Average) και με το οποίο θα υπολογίσουμε την μεταβλητότητα της επομένης ημέρας. Ο τύπος είναι ο παρακάτω:

$$\sigma_t^2 = \lambda(\sigma_{t-1}^2) + (1 - \lambda)r_{t-1}^2$$

Όπου φαίνεται ότι για τον υπολογισμό της μεταβλητότητας σήμερα χρησιμοποιείται ένα σταθμισμένο άθροισμα της προηγούμενης παρατήρησης της μεταβλητότητας και της προηγούμενης παρατήρησης της λογαριθμικής απόδοσης. Το υπόδειγμα αυτό είναι μια προσπάθεια να ξεπεραστεί η προϋπόθεση της σταθερής – αδέσμευτης μεταβλητότητας που υπάρχει στα παραπάνω υποδείγματα. Η τιμή  $\lambda$  που χρησιμοποιείται είναι  $\lambda=94\%$  και είναι η τιμή που χρησιμοποιείται από την Riskmetrics (J.P. Morgan). Η ημερήσια μεταβλητότητα είναι 1,63% και η ετήσια 25,85% όπως φαίνεται και από τον παρακάτω πίνακα 2. (Ολόκληρος ο πίνακας στο Παράρτημα 2) Άλλα υποδείγματα τα οποία χρησιμοποιούν στοιχεία χρονολογικών σειρών είναι το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα (Autoregressive model) και το αυτοπαλίνδρομο υπόδειγμα κινητού μέσου όρου (ARMA Autoregressive Moving Average) με τα οποία δεν θα υπολογιστεί ενδεικτικά η μεταβλητότητα καθώς δεν συμπεριλαμβάνουν τις παραπάνω ιδιότητες και θεωρούν την μεταβλητότητα

σταθερή. Θα συνεχιστεί η ανάλυση με την οικογένεια των ARCH και GARCH υποδειγμάτων.

				lambda	94,00%
				EWMA	0,0267%
				Std. Dev	1,6349%
				Annual S.Dev	25,8503%
Date	Γεν Δείκτης	log return	Log return Squared	weights	
15/11/2013	1133,46	0,69%	0,004788%	1,00%	0,000048%
18/11/2013	1141,33	0,33%	0,001082%	1,06%	0,000011%
19/11/2013	1145,09	-0,74%	0,005473%	1,13%	0,000062%
20/11/2013	1136,65	0,45%	0,002067%	1,20%	0,000025%
21/11/2013	1141,83	2,34%	0,054901%	1,28%	0,000701%
>>	>>	>>	>>	>>	>>
20/12/2013	1123,86	-1,05%	0,011103%	4,68%	0,000520%
23/12/2013	1112,08	0,00%	0,000000%	4,98%	0,000000%
24/12/2013	1112,08	4,67%	0,218042%	5,30%	0,011560%
27/12/2013	1165,24	-0,62%	0,003852%	5,64%	0,000217%
30/12/2013	1158,03	0,40%	0,001606%	6,00%	0,000096%
31/12/2013	1162,68				

Πίνακας 2. Μεταβλητότητα 30 ημερών με το υπόδειγμα EWMA.

Είναι εμφανές ότι αν υπολογίσουμε την μεταβλητότητα με διαφορετικά δείγματα ή δώσουμε διαφορετικό βάρος σε κάθε παρατήρηση τότε η εκτίμηση που θα έχουμε θα είναι διαφορετική και αυτό είναι ένα σημάδι ότι η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή και δεν πρέπει να αντιμετωπίζεται έτσι.

## **ΕΝΟΤΗΤΑ Δ : ΤΕΚΜΑΡΤΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ**

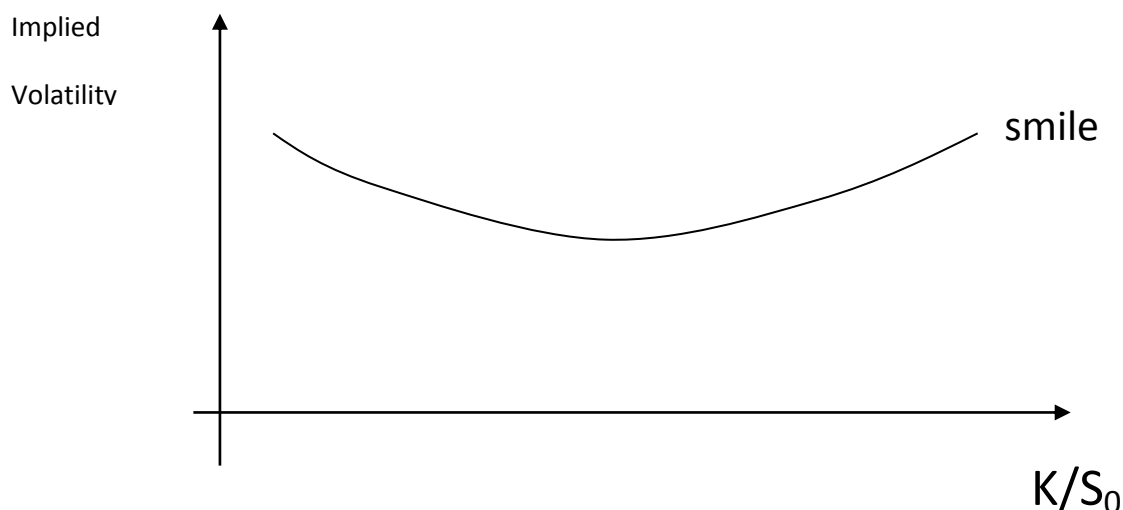
## Τεκμαρτή μεταβλητότητα (Implied Volatility)

Η εκτίμηση της ετήσιας μεταβλητότητας για τον επόμενο χρόνο μέχρι στιγμής στην ανάλυση μας είναι σταθερή ενώ με βάσει τα εμπειρικά δεδομένα αυτό που φαίνεται είναι ότι απαιτείται μια θεωρία δυναμικής μεταβλητότητας. Τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι αυτή που υπολογίζεται από τις τιμές των δικαιωμάτων προαίρεσης που παρατηρούνται στην αγορά δηλαδή είναι η άποψη της αγοράς για το ποιά είναι η μεταβλητότητα και αν υπολογιστεί για διαφορετικές προκαθορισμένες τιμές εκτελέσεως τότε παράγει διαφορετικά αποτελέσματα μεταβλητότητας. Καθώς δεν στηρίζεται σε ιστορικά δεδομένα ξαφνικές μεταβολές στη μεταβλητότητα που μπορεί να οφείλονται σε κάποιο καλό ή κακό νέο μπορεί να συμπεριλαμβάνονται στην αντίληψη της αγοράς ενώ αντίθετα δεν απεικονίζονται απαραίτητα στην ιστορική συμπεριφορά της μετοχής ή του δείκτη. Η τεκμαρτή μεταβλητότητα μπορεί να υπολογιστεί μόνο για προϊόντα για τα οποία δικαιώματα προαίρεσης διαπραγματεύονται στην αγορά δηλαδή όχι για τον ΓΔ αλλά σε επίπεδο δείκτη μόνο για τον FTSE/20 δηλαδή των 20 μεγαλύτερων εταιρειών του ΧΑΑ. Η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι η παράμετρος  $\sigma$  η οποία αν αντικατασταθεί στο υπόδειγμα Black and Scholes (1973) μας δίνει μια θεωρητική τιμή ίση με την αγοραία τιμή. Δηλαδή, από το υπόδειγμα του Black and Scholes για ένα δικαίωμα αγοράς είναι γνωστό ότι η

$$c_{BS}(S,K,T,r,\sigma) = SN(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2)$$

η τιμή του παραπάνω δικαιώματος αγοράς είναι μια συνάρτηση της τιμής του υποκείμενου προϊόντος ( $S$ ), της τιμής εκτελέσεως ( $K$ ), των ημερών μέχρι την λήξη ( $T$ ), του χωρίς κίνδυνο επιτόκιο ( $r$ ) και της μεταβλητότητας ( $\sigma$ ). Όλες οι παραπάνω παράμετροι εκτός από την μεταβλητότητα είναι γνωστοί. Επομένως, η τιμή του  $\sigma$  η οποία ικανοποιεί την εξίσωση  $c_{BS}(S,K,T,r,\sigma) = c_m$  είναι η τεκμαρτή μεταβλητότητα. Όπου στο αριστερό μέρος της εξίσωσης είναι η θεωρητική τιμή από το υπόδειγμα του BS και στο δεξί η τιμή της αγοράς. Η παραπάνω εξίσωση μπορεί να λυθεί καθώς η τιμή ενός δικαιώματος αγοράς είναι μια αύξουσα μονοτονική συνάρτηση του  $\sigma$ . Όσο η τιμή του δικαιώματος είναι μεγαλύτερη από  $\max(S - K^{-r(T-t)}, 0)$  και μικρότερη από  $S$  τότε υπάρχει μόνο μια τιμή για την παράμετρο  $\sigma$  στην παραπάνω εξίσωση. (Απόδειξη Fouque, Papanicolaou and Sircar 2000, p34)

Αν θα κατασκευάζαμε ένα γράφημα με τις τεκμαρτές μεταβλητότητες θα έμοιαζε με ένα χαμόγελο όπως στο γράφημα που ακολουθεί το οποίο είναι ακόμη ένα δείγμα ότι η μεταβλητότητα δεν είναι σταθερή.



Γράφημα 7. Τεκμαρτή μεταβλητότητα, το <<χαμόγελο>> της μεταβλητότητας

Παρόλα αυτά, αυτό δεν σημαίνει ότι η τεκμαρτή μεταβλητότητα είναι σωστότερη σε σχέση με την ιστορική μεταβλητότητα ή ότι παράγει πιο ακριβείς προβλέψεις.

Για τους παραπάνω λόγους δημιουργήθηκε ο γνωστός δείκτης VIX ο οποίος εκφράζει την άποψη των συμμετεχόντων στην Αμερικανική μετοχική χρηματιστηριακή αγορά για την αναμενόμενη μελλοντική μεταβλητότητά της και χρησιμοποιείται από τους αναλυτές. Παρουσιάστηκε το 1993 και η κατασκευή του αρχικώς στηρίχτηκε στην εργασία του Whaley (1993). Ο συγκεκριμένος δείκτης έγινε ο δείκτης αναφοράς της τεκμαρτής μεταβλητότητας του αμερικανικού χρηματιστηρίου. Πολύ γρήγορα ακολούθησαν και άλλα μεγάλα χρηματιστήρια του κόσμου και παρουσίασαν τους δικούς τους αντίστοιχους δείκτες. Ειδικότερα, το γερμανικό δημιούργησε το 1994 τον VDAX, ενώ το Γαλλικό χρηματιστήριο το 1997 παρουσίασε τον VX1. Τέλος, για το ελληνικό χρηματιστήριο έχει κατασκευαστεί ο σχετικός δείκτης με το όνομα GRIV.

**ΕΝΟΤΗΤΗΤΑ Ε : ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΑ ΜΕ ΔΕΣΜΕΥΜΕΝΗ  
ΕΤΕΡΟΣΚΕΛΑΣΤΙΚΟΤΗΤΑ**

## Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα ARCH model

Η ομάδα των υποδειγμάτων ARCH/GARCH δεν χρησιμοποιεί την τυπική απόκλιση του δείγματος και δεν θεωρεί την διακύμανση σταθερή. Οι Cambell , Lo και MacKinlay (1997, p481) έχουν επισημάνει ότι :''It is logically inconsistent and statistically inefficient to use volatility measures that are based on the assumption of constant volatility over some period when the series move through time''. Εκτός από την μη σταθερή διακύμανση τα υποδείγματα αυτού του τύπου καταφέρνουν να συμπεριλαμβάνουν και πολλά από τα εμπειρικά δεδομένα που αναφέρθηκαν σε προηγούμενο κεφάλαιο , όπως ενδεικτικά η συσσώρευση μεταβλητότητας και η λεπτόκυρτη κατανομή. Η απλή παλινδρόμηση και τα απλά υποδείγματα χρονολογικών σειρών όπως το αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο (AR), το μοντέλο κινητού μέσου όρου (MA) και το αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο κινητού μέσου όρου (ARMA) έχουν την προϋπόθεση της ομοσκεδαστικότητας ή ισης διακύμανσης του σφάλματος και αυτό δεν έχει εφαρμογή σε χρονολογικές σειρές όπως ένας χρηματιστηριακός δείκτης. Το πρώτο μοντέλο αυτής της ομάδας, με βάση το οποίο εξελίχθηκαν όλα τα υπόλοιπα είναι του Robert Engle (1982) για μια έρευνα πάνω στον πληθωρισμό του Ηνωμένου Βασιλείου. Στο σημείο αυτό θα παρουσιαστεί το υπόδειγμα ARCH . Αν υποθέσουμε ότι έχουμε T παρατηρήσεις αποδόσεων (και ακολουθώντας την ίδια σημειογραφία)  $r_1, r_2, \dots, r_T$  και  $\Omega_{t-1}$  είναι όλη η διαθέσιμη πληροφόρηση στο χρονικό σημείο t-1 το υπόδειγμα είναι το εξής:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad z_t \sim \text{i.i.d. } D(0,1)$$

Όπου  $\mu_t = E[r_t | \Omega_{t-1}]$  είναι ο υπό-συνθήκη μέσος ή αναμενόμενη τιμή ,  $\varepsilon_t$  είναι το σφάλμα ή τυπική απόκλιση της απόδοσης ,  $h_t$  είναι η υπό συνθήκη διακύμανση ή διακύμανση του σφάλματος και  $D(0,1)$  είναι μια συμμετρική ,τυπική κατανομή. Συνήθως υποθέτουμε ότι ακολουθεί την τυπική κανονική κατανομή, την τυποποιημένη student-t κατανομή ή την generalized error distribution (GED). Επομένως  $\varepsilon_t | \Omega_{t-1} \sim D(0, h_t)$ . Πιο συγκεκριμένα , η μορφή που έχει το ARCH (1) για την εξίσωση της διακύμανσης  $h_t$  του σφάλματος είναι :

$$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2$$

Γενικότερα , ένα υπόδειγμα ARCH (m) εκφράζει τη διακύμανση του σφάλματος  $h_t$  ως μια γραμμική συνάρτηση m αριθμού προηγούμενων παρατηρήσεων εις το τετράγωνο  $\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-m}^2$  :

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^m a_i \varepsilon_{t-i}^2, \quad \omega > 0 \text{ και } a_i \geq 0 \text{ } i=1, \dots, m$$

Το υπόδειγμα ARCH είναι ένα μοντέλο χρονοσειρών που θεωρεί τη διακύμανση του τρέχοντος σφάλματος ως συνάρτηση των διακυμάνσεων των όρων σφάλματος των προηγούμενων χρονικών περιόδων  $h_t = f(\varepsilon_{t-1}^2, \varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-m}^2)$ . Διαφορετικά, το μοντέλο ARCH υποθέτει αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο (AutoRegressive model - AR) για τη διακύμανση του σφάλματος. Ο υπολογισμός των παραμέτρων  $\omega$  και  $a_1$  σε ένα υπόδειγμα ARCH(1) εκτελείται μέσω μιας διαδικασίας μέγιστης πιθανοφάνειας (maximum likelihood procedure) αν υποθέσουμε κανονική κατανομή. Το απλό υπόδειγμα ARCH (1) και ο υπολογισμός του για  $k=2 \dots T$  περιγράφεται ως εξής:

$$f(\text{data} \mid \text{parameters}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(\omega + a_1 \varepsilon_{k-1}^2)}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_k^2}{2(\omega + a_1 \varepsilon_{k-1}^2)}\right)$$

Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L(\omega, \alpha_i) = \prod_{j=2}^T \frac{1}{\sqrt{2\pi(\omega + a_1 \varepsilon_{j-1}^2)}} \exp\left(-\frac{\varepsilon_j^2}{2(\omega + a_1 \varepsilon_{j-1}^2)}\right)$$

Και η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας της κανονικής κατανομής είναι:

$$\ell(\omega, \alpha_i) = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^T \left[ \ln(\omega + a_1 \varepsilon_{j-1}^2) + \frac{\varepsilon_j^2}{(\omega + a_1 \varepsilon_{j-1}^2)} \right]$$

ή απλά:

$$\ell(\omega, \alpha_i) = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^T \left[ \ln(h_t) + z_t^2 \right]$$

Οι εκτιμήσεις των  $\hat{\omega}$  και  $\hat{a}_1$  δίνονται με την λύση των παρακάτω παραγώγων:

$$\frac{\partial \ell}{\partial \omega} = 0 \text{ and } \frac{\partial \ell}{\partial a_1} = 0$$



Εναλλακτικά, όπως συνιστούν οι Glosten (1993) θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί – αντί για τη διαδικασία μέγιστης πιθανοφάνειας – μια γενικευμένη μέθοδος ροπών (Generalized Method of Moments).

### Γενικευμένο Αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα GARCH(p,q) model

Αν υποθεθεί αυτοπαλινδρομούμενο μοντέλο κινητού μέσου όρου (AutoRegressive Moving Average model - ARMA) για τη διακύμανση του σφάλματος, τότε το μοντέλο καλείται γενικευμένο αυτοπαλινδρομούμενο με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα (Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedasticity - GARCH). Το πιο δημοφιλές μοντέλο αυτής της κατηγορίας αναπτύχθηκε από το μαθητή του Engle, τον Bollerslev (1986), και επιτρέπει επιπλέον εξάρτηση από  $p$  υστερήσεις παλαιότερων διακυμάνσεων  $h_t$  με σκοπό να μην απαιτούνται υποδείγματα υψηλής τάξης ARCH ( $m$ ). Ένα υπόδειγμα GARCH(p,q) εκφράζεται ως εξής :Αν υποθέσουμε ότι και πριν , δηλαδή  $\varepsilon_t = \sqrt{h_t}z_t$  ,  $z_t \sim \text{i.i.d. } D(0,1)$  τότε η διακύμανση του σφάλματος είναι :

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

και  $\omega \geq 0$ ,  $a_i \geq 0$ ,  $\beta_j \geq 0$  . Ουσιαστικά η εκτιμώμενη από το GARCH διακύμανση αποτελεί το σταθμισμένο μέσο όρο τριών διαφορετικών προβλέψεων: Πρώτον, της σταθερής διακύμανσης που υποδηλώνει το μακροχρόνιο μέσο όρο  $\omega$ , δεύτερον των νέων πληροφοριών που δεν ήταν διαθέσιμες όταν έγινε η προηγούμενη πρόβλεψη και τρίτον της πρόβλεψης που είχε γίνει την αμέσως προηγούμενη περίοδο. Το υπόδειγμα πρώτης τάξεως GARCH (1,1) το οποίο είναι το πιο δημοφιλές υπόδειγμα εκφράζεται ως εξής :

$$h_t = \omega + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$$

δηλαδή η διακύμανση εξαρτάται από μια χρονική περίοδο πίσω για κάθε  $\varepsilon_{t-1}^2$  και  $h_{t-1}$  . Για την εκτίμηση του υποδείγματος χρησιμοποιείται κυρίως η μέθοδος μέγιστης πιθανοφάνειας (MLE) και η λογαριθμική συνάρτηση πιθανοφάνειας της κανονικής κατανομής είναι της μορφής :

$$\ell_T = -\frac{1}{2} \sum_{j=2}^T \left[ \ln(2\pi) + \ln(h_t) + z_t^2 \right].$$

Υποθέτουμε συνήθως ότι ακολουθείται η τυπική κανονική κατανομή, η τυποποιημένη student-t κατανομή ή η generalized error distribution (GED).

### Άλλα σημαντικά υποδείγματα μορφής ARCH/GARCH – EGARCH και TAR

Ο Nelson (1991) ήταν αυτός που συμπεριέλαβε σε υπόδειγμα ότι η μεταβλητότητα αντιδρά ασύμμετρα σε σφάλματα προβλέψεων του παρελθόντος, ότι δηλαδή οι αρνητικές αποδόσεις έχουν μεγαλύτερη αξία από ότι οι αντίστοιχες θετικές αποδόσεις. Πρότεινε το υπόδειγμα EGARCH το οποίο επιτρέπει να επιδρούν ασύμμετρα στην μεταβλητότητα αρνητικές και θετικές αποδόσεις. Στο υπόδειγμα αυτό της διακύμανσης του σφάλματος υπάρχουν δύο νέοι όροι: η υπό συνθήκη διακύμανση είναι σε λογαριθμική μορφή και ένας επιπλέον όρος ο οποίος εξηγεί το φαινόμενο της μόχλευσης (leverage effect) και της συσσώρευσης μεταβλητότητας (clustering). Επιπρόσθετα η χρήση λογάριθμων για τις παραμέτρους  $\alpha_i$  και  $\beta_j$  εξασφαλίζει τον περιορισμό για μη αρνητικότητα των παραμέτρων ενώ η υπό συνθήκη διακύμανση είναι θετική. Η υπό συνθήκη διακύμανση του σφάλματος εκφράζεται ως εξής :

$$\ln h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left( \zeta_1 \frac{|\varepsilon_{t-i}|}{\sqrt{h_{t-i}}} + \zeta_2 \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sqrt{h_{t-i}}} \right) + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j}$$

Ένα άλλο υπόδειγμα που εκφράζει την ασυμμετρία επίδρασης στην μεταβλητότητα είναι το GJR των Glosten (1993) και το TGARCH του Zakoian (1994). Στο υπόδειγμα αυτό υπάρχει ένας επιπλέον όρος που εμφανίζεται μόνο σε περίπτωση αρνητικής απόδοσης.

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \xi I_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$$

όπου  $I_{t-i} = 1$  αν  $\varepsilon_{t-i} < 0$ , και  $I_{t-i} = 0$  αν  $\varepsilon_{t-i} > 0$ . Επομένως, σε ένα υπόδειγμα TGARCH (1,1) τα θετικά νέα έχουν μια επίδραση  $\alpha_1$  ενώ τα αρνητικά νέα  $\alpha_1 + \xi$ . Υπάρχουν και άλλα υποδείγματα της οικογένειας ARCH τα οποία είναι πέρα από τα όρια αυτής της εργασίας, ενδεικτικά θα αναφερθούν το IGARCH Engle and Bollerslev (1986) το

GARCH – M Engle , Lillien και Robins (1987) και το SWARCH Hamilton και Susmuel (1994).

## **ΕΝΟΤΗΤΑ Ζ: ΕΛΕΓΧΟΣ ΓΙΑ ARCH, ΥΠΛΟΓΙΣΜΟΙ GARCH**

### Έλεγχος για ARCH και υπολογισμός GARCH (1,1)

Για να ελεγχθεί αν υπάρχει αυτοπαλινδρομούμενο υπόδειγμα δεσμευμένης ετετοσκεδαστικότητας θα χρησιμοποιηθεί το Eviews. Με την μέθοδο των ελαχίστων τετραγώνων υπολογίζεται η παλινδρόμηση της παρακάτω εξίσωσης :

$$\text{LnReturns} = \alpha + \beta \text{LnReturns}_{t-1} + \varepsilon_t, \quad (r_t = \mu_t + \varepsilon_t) \text{ AR}(1)$$

Όπως είχε σημειωθεί σε προηγούμενη ενότητα η χρονολογική αυτή σειρά είναι στάσιμη I(0). Το αποτέλεσμα της παλινδρόμησης είναι :

Dependent Variable: LOG_RETURN				
Method: Least Squares				
Date: 03/30/14 Time: 18:43				
Sample (adjusted): 1/06/2003 12/31/2013				
Included observations: 2833 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000140	0.000336	-0.416353	0.6772
LOG_RETURN(-1)	0.063414	0.018757	3.380845	0.0007
R-squared	0.004021	Mean dependent var		-0.000150
Adjusted R-squared	0.003669	S.D. dependent var		0.017927
S.E. of regression	0.017894	Akaike info criterion		-5.207948
Sum squared resid	0.906517	Schwarz criterion		-5.203748
Log likelihood	7379.058	Hannan-Quinn criter.		-5.206433
F-statistic	11.43011	Durbin-Watson stat		1.993898
Prob(F-statistic)	0.000732			

Πίνακας 3. Παλινδρόμηση AR(1).

Αν προσθέσουμε στην αρχική παλινδρόμηση μια ακόμη χρονική υστέρηση την  $\text{LnReturns}_{t-2}$  και τρέξουμε την παλινδρόμηση θα δούμε από το p-value ότι είναι σημαντική και επομένως η εξίσωση της παλινδρόμησης είναι:

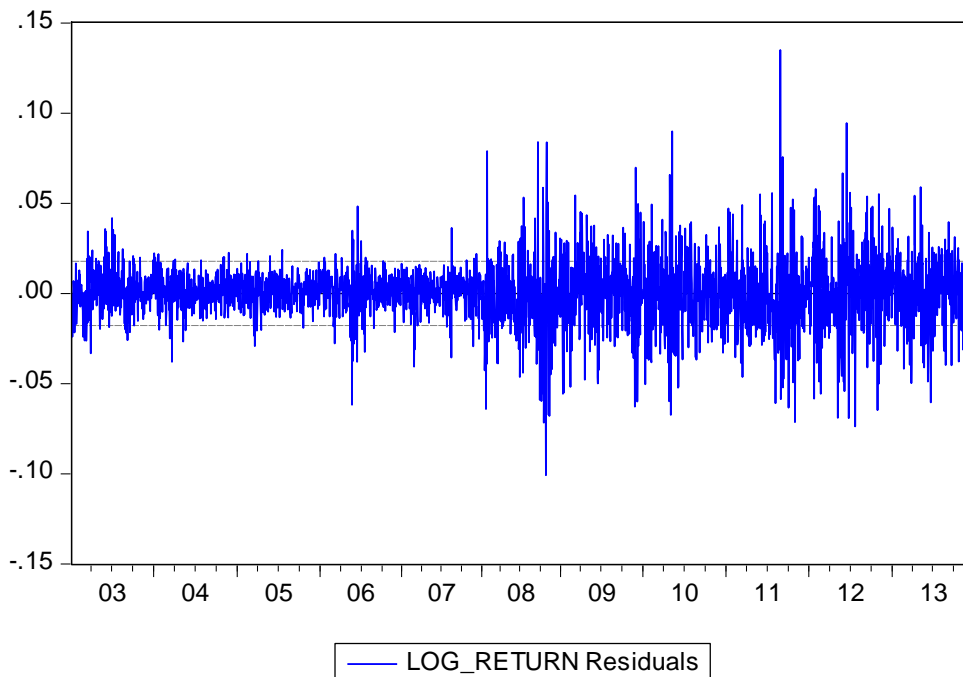
$$\text{LnReturns} = \alpha + \beta \text{LnReturns}_{t-1} + \beta \text{LnReturns}_{t-2} + \varepsilon_t, \quad (r_t = \mu_t + \varepsilon_t) \text{ AR}(2)$$

Αν προσθέσουμε και άλλη χρονική υστέρηση θα δούμε ότι δεν είναι στατιστικά σημαντική και επομένως δεν την συμπεριλαμβάνουμε στην εξίσωση.

Dependent Variable: LOG_RETURN				
Method: Least Squares				
Date: 03/31/14 Time: 21:33				
Sample (adjusted): 1/07/2003 12/31/2013				
Included observations: 2832 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.000147	0.000336	-0.436675	0.6624
LOG_RETURN(-1)	0.066455	0.018780	3.538672	0.0004
LOG_RETURN(-2)	-0.047938	0.018780	-2.552604	0.0107
R-squared	0.006310	Mean dependent var	-0.000150	
Adjusted R-squared	0.005607	S.D. dependent var	0.017931	
S.E. of regression	0.017880	Akaike info criterion	-5.209189	
Sum squared resid	0.904434	Schwarz criterion	-5.202887	
Log likelihood	7379.211	Hannan-Quinn criter.	-5.206915	
F-statistic	8.982078	Durbin-Watson stat	1.997730	
Prob(F-statistic)	0.000129			

Πίνακας 4. Παλινδρόμηση AR(2)

Ακολουθεί ένα χαρακτηριστικό γράφημα του σφάλματος από την παλινδρόμηση όπου κάποιος μπορεί να δει ότι περίοδοι από υψηλά κατάλοιπα (residuals) ακολουθούνται από υψηλά κατάλοιπα και το αντίστροφο.



Γράφημα 8. Κατάλοιπα παλινδρόμησης.

Στη συνέχεια εκτελούνται διαγνωστικοί έλεγχοι για την παλινδρόμηση, με πρώτο τον έλεγχο για αυτοσυσχέτιση όπου παρατηρείται ότι υπάρχει πρόβλημα αυτοσυσχέτισης στο υπόδειγμα με το σχετικό p-value να είναι  $0,04726 < 0,05$  (Παράρτημα 3). Για να εξαληφθεί αυτό το πρόβλημα από το υπόδειγμα πρέπει να προστεθούν χρονικές

υστερήσεις (Lags) , αν ελεγχθεί για 7 lags τότε το πρόβλημα όπως φαίνεται παρακάτω δεν υφίσταται. Το p-value είναι  $0,09820 > 0,05$ .

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:				
F-statistic	1.726712	Prob. F(7,2822)		0.0982
Obs*R-squared	12.07808	Prob. Chi-Square(7)		0.0980
Test Equation:				
Dependent Variable: RESID				
Method: Least Squares				
Date: 03/31/14 Time: 21:40				
Sample: 1/07/2003 12/31/2013				
Included observations: 2832				
Presample missing value lagged residuals set to zero.				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-0.085372	0.039311	-2.171690	0.0300
LOG_RETURN(-1)	-418.4212	198.5910	-2.106949	0.0352
LOG_RETURN(-2)	-152.7467	74.89609	-2.039449	0.0415
RESID(-1)	418.4224	198.5906	2.106959	0.0352
RESID(-2)	180.5503	85.94466	2.100774	0.0357
RESID(-3)	-8.035534	5.451306	-1.474057	0.1406
RESID(-4)	-9.193009	4.296828	-2.139487	0.0325
RESID(-5)	-0.200753	0.269468	-0.744998	0.4563
RESID(-6)	0.409794	0.197485	2.075068	0.0381
RESID(-7)	0.073534	0.029267	2.512499	0.0120
R-squared	0.004265	Mean dependent var		1.40E-18
Adjusted R-squared	0.001089	S.D. dependent var		0.017874
S.E. of regression	0.017864	Akaike info criterion		-5.208519
Sum squared resid	0.900577	Schwarz criterion		-5.187514
Log likelihood	7385.263	Hannan-Quinn criter.		-5.200941
F-statistic	1.342998	Durbin-Watson stat		2.001295
Prob(F-statistic)	0.209052			

Πίνακας 5. Διαγνωστικός έλεγχος αυτοσυσχέτισης

Ο επόμενος διαγνωστικός έλεγχος αφορά την παρουσία ARCH effects. Διενεργώντας τον σχετικό έλεγχο καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στα σφάλματα (κατάλοιπα) υπάρχουν ARCH effects και επομένως η διακύμανση τους δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με τον χρόνο. Το p-value του Chi Squared με 7 lags είναι όπως και με 1 lag.

Heteroskedasticity Test: ARCH				
F-statistic	53.93467	Prob. F(7,2817)	0.0000	
Obs*R-squared	333.8688	Prob. Chi-Square(7)	0.0000	
Test Equation:				
Dependent Variable: RESID^2				
Method: Least Squares				
Date: 03/31/14 Time: 21:42				
Sample (adjusted): 1/16/2003 12/31/2013				
Included observations: 2825 after adjustments				
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	0.000124	1.75E-05	7.062230	0.0000
RESID^2(-1)	0.069262	0.018501	3.743663	0.0002
RESID^2(-2)	0.090842	0.018527	4.903162	0.0000
RESID^2(-3)	0.080391	0.018602	4.321608	0.0000
RESID^2(-4)	0.087817	0.018591	4.723741	0.0000
RESID^2(-5)	0.051086	0.018604	2.745951	0.0061
RESID^2(-6)	0.046136	0.018549	2.487296	0.0129
RESID^2(-7)	0.189536	0.018522	10.23275	0.0000
R-squared	0.118184	Mean dependent var	0.000320	
Adjusted R-squared	0.115992	S.D. dependent var	0.000785	
S.E. of regression	0.000738	Akaike info criterion	-11.58124	
Sum squared resid	0.001536	Schwarz criterion	-11.56440	
Log likelihood	16366.51	Hannan-Quinn criter.	-11.57517	
F-statistic	53.93467	Durbin-Watson stat	2.021824	
Prob(F-statistic)	0.000000			

Πίνακας 6. Διαγνωστικός έλεγχος ετεροσκεδαστικότητας

Στην συνέχεια ακολουθεί ο υπολογισμός ενός GARCH (1,1) της μορφής :

$h_t = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$  και μετά απο 16 επαναλήψεις (iterations) προκύπτει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Dependent Variable: LOG_RETURN				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 03/31/14 Time: 21:43				
Sample (adjusted): 1/07/2003 12/31/2013				
Included observations: 2832 after adjustments				
Convergence achieved after 16 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000837	0.000235	3.566614	0.0004
LOG_RETURN(-1)	0.061482	0.019580	3.140120	0.0017
LOG_RETURN(-2)	-0.039002	0.019604	-1.989447	0.0467



Variance Equation				
C	1.40E-06	3.91E-07	3.575413	0.0003
RESID(-1)^2	0.084661	0.006139	13.79149	0.0000
GARCH(-1)	0.915609	0.005179	176.7834	0.0000
R-squared	0.003202	Mean dependent var	-0.000150	
Adjusted R-squared	0.002497	S.D. dependent var	0.017931	
S.E. of regression	0.017908	Akaike info criterion	-5.536400	
Sum squared resid	0.907263	Schwarz criterion	-5.523797	
Log likelihood	7845.542	Hannan-Quinn criter.	-5.531853	
Durbin-Watson stat	1.982273			

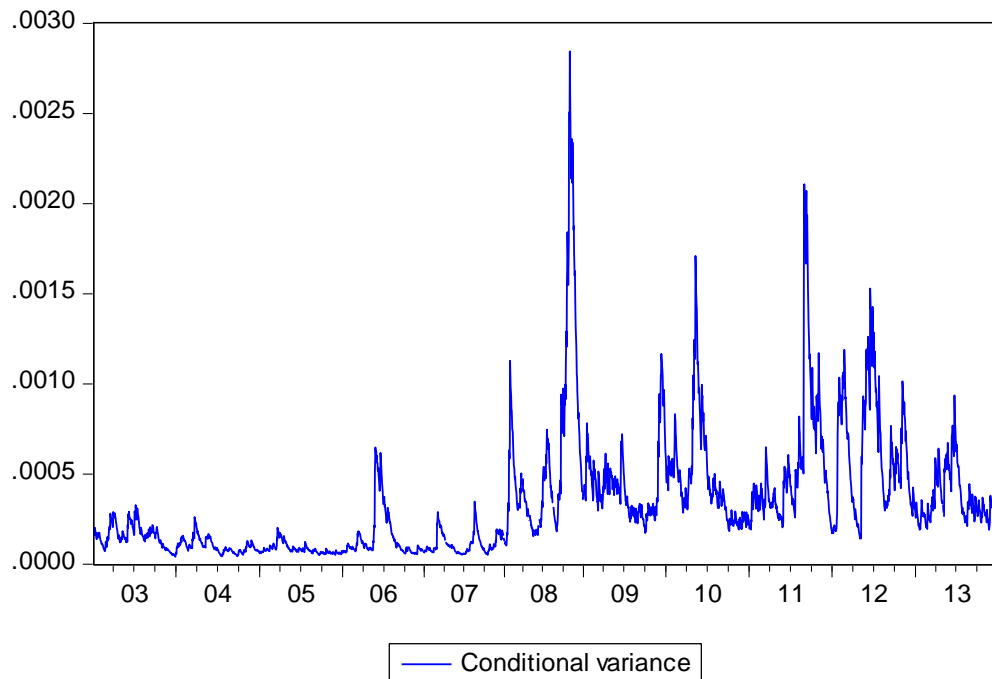
Πίνακας 7. Υπολογισμός GARCH (1,1)

Δηλαδή, μεταφέροντας τα ευρήματα στις σχετικές εξισώσεις του AR(2)GARCH(1.1):

$$\text{LnReturns} = 0.000837 + 0.061482 \text{LnReturns}_{t-1} - 0.039002 \text{LnReturns}_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$h_t = 1.40\text{E-}06 + 0.084661 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.915609 h_{t-1}$$

Αυτό που φαίνεται στο παρακάτω γράφημα είναι ότι η μεταβλητότητα μεταβάλλεται με τον χρόνο και με μια προσεκτικότερη ματιά ότι επιστρέφει στο μέσο (mean reverting).



Γράφημα 9. Δεσμευμένη Ετεροσκεδαστικότητα.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την διακύμανση με την υπόθεση της student t κατανομής:

Dependent Variable: LOG_RETURN				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Student's t distribution				
Date: 03/31/14 Time: 22:44				
Sample (adjusted): 1/07/2003 12/31/2013				
Included observations: 2832 after adjustments				
Convergence achieved after 14 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000772	0.000227	3.402215	0.0007
LOG_RETURN(-1)	0.066342	0.019573	3.389454	0.0007
LOG_RETURN(-2)	-0.032975	0.018758	-1.757888	0.0788
Variance Equation				
C	1.89E-06	6.26E-07	3.027920	0.0025
RESID(-1)^2	0.086802	0.010761	8.066089	0.0000
GARCH(-1)	0.911416	0.009766	93.32806	0.0000
T-DIST. DOF	7.167504	0.939273	7.630903	0.0000
R-squared	0.003471	Mean dependent var		-0.000150
Adjusted R-squared	0.002767	S.D. dependent var		0.017931
S.E. of regression	0.017906	Akaike info criterion		-5.570442
Sum squared resid	0.907018	Schwarz criterion		-5.555738
Log likelihood	7894.746	Hannan-Quinn criter.		-5.565137
Durbin-Watson stat	1.992933			

Πίνακας 8. Υπολογισμός GARCH(1,1) με t-student κατανομή.

Μεταφέροντας τα ευρήματα στις σχετικές εξισώσεις του AR(2)GARCH(1.1):

$$\text{LnReturns} = 0.000772 + 0.066342 \text{LnReturns}_{t-1} - 0.032975 \text{LnReturns}_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$h_t = 1.89\text{E-}06 + 0.086802 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.911416 h_{t-1}$$

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε την διακύμανση με την υπόθεση της GED κατανομής:

Dependent Variable: LOG_RETURN				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Generalized error distribution (GED)				
Date: 03/31/14 Time: 22:51				
Sample (adjusted): 1/07/2003 12/31/2013				
Included observations: 2832 after adjustments				
Convergence achieved after 13 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000746	0.000218	3.425340	0.0006
LOG_RETURN(-1)	0.051138	0.018677	2.737972	0.0062
LOG_RETURN(-2)	-0.035265	0.018237	-1.933679	0.0532
Variance Equation				
C	1.76E-06	6.38E-07	2.761747	0.0057
RESID(-1)^2	0.085713	0.010490	8.170694	0.0000
GARCH(-1)	0.912709	0.009472	96.35503	0.0000

GED PARAMETER	1.349583	0.044593	30.26434	0.0000
R-squared	0.003455	Mean dependent var	-0.000150	
Adjusted R-squared	0.002750	S.D. dependent var	0.017931	
S.E. of regression	0.017906	Akaike info criterion	-5.574539	
Sum squared resid	0.907032	Schwarz criterion	-5.559835	
Log likelihood	7900.547	Hannan-Quinn criter.	-5.569234	
Durbin-Watson stat	1.963118			

Πίνακας 9. Υπολογισμός GARCH(1,1) με GED κατανομή.

$$\text{LnReturns} = 0.000746 + 0.051138 \text{LnReturns}_{t-1} - 0.035265 \text{LnReturns}_{t-2} + \varepsilon_t$$

$$h_t = 1.76\text{E-}06 + 0.085713 \varepsilon_{t-1}^2 + 0.912709 h_{t-1}$$

## Υπολογισμός με TARCH

Συνεχίζοντας τους υπολογισμούς και με κάποια από τα υπόλοιπα υποδείγματα: Το υπόδειγμα TARCH μπορεί να δείξει αν υπάρχει το φαινόμενο της μόγλευσης ( leverage effects ) ότι δηλαδή τα αρνητικά νέα έχουν μεγαλύτερη επίδραση από ότι τα θετικά νέα στην μεταβλητότητα ή στην διακύμανση των σφαλμάτων. Από το παρακάτω αποτέλεσμα φαίνεται ότι ο συντελεστής C6 είναι θετικός και από το p-value στατιστικά σημαντικός. Έπειτα, από τους διαγνωστικούς ελέγχους των καταλοίπων (παράρτημα) το υπόδειγμα για την διακύμανση δεν έχει serial correlation και Arch Effects αλλά ο έλεγχος για κανονική κατανομή δεν είναι θετικός.

Dependent Variable: LOG_RETURN				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 04/04/14 Time: 21:16				
Sample (adjusted): 1/07/2003 12/31/2013				
Included observations: 2832 after adjustments				
Convergence achieved after 16 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
GARCH = C(4) + C(5)*RESID(-1)^2 + C(6)*RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0) + C(7)*GARCH(-1)				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000589	0.000241	2.449299	0.0143
LOG_RETURN(-1)	0.064842	0.019675	3.295651	0.0010
LOG_RETURN(-2)	-0.036532	0.019581	-1.865674	0.0621
Variance Equation				
C	1.70E-06	3.99E-07	4.252735	0.0000
RESID(-1)^2	0.054927	0.007423	7.399996	0.0000
RESID(-1)^2*(RESID(-1)<0)	0.054893	0.009570	5.735770	0.0000
GARCH(-1)	0.914786	0.005689	160.8105	0.0000
R-squared	0.004500	Mean dependent var	-0.000150	
Adjusted R-squared	0.003796	S.D. dependent var	0.017931	
S.E. of regression	0.017896	Akaike info criterion	-5.543114	
Sum squared resid	0.906081	Schwarz criterion	-5.528410	
Log likelihood	7856.049	Hannan-Quinn criter.	-5.537809	
Durbin-Watson stat	1.991689			

Πίνακας 10. Υπολογισμός TARCH

## Υπολογισμός με EGARCH

Με το υπόδειγμα EGARCH μπορεί να ελεγχθεί αν υπάρχει το φαινόμενο της μόχλευσης όπως και παραπάνω. Ο συντελεστής C6 είναι αρνητικός και είναι στατιστικά σημαντικός από το p-value <0.05. Με βάσει τους διαγνωστικούς ελέγχους των καταλοίπων δεν υπάρχει σειριακή αυτοσυσχέτιση, υπάρχουν ARCH Effects και η κατανομή δεν είναι κανονική.

Dependent Variable: LOG_RETURN				
Method: ML - ARCH (Marquardt) - Normal distribution				
Date: 04/04/14 Time: 21:57				
Sample (adjusted): 1/07/2003 12/31/2013				
Included observations: 2832 after adjustments				
Convergence achieved after 13 iterations				
Presample variance: backcast (parameter = 0.7)				
LOG(GARCH) = C(4) + C(5)*ABS(RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1))) + C(6)*RESID(-1)/@SQRT(GARCH(-1)) + C(7)*LOG(GARCH(-1))				
Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	0.000677	0.000233	2.902275	0.0037
LOG_RETURN(-1)	0.063423	0.018814	3.371100	0.0007
LOG_RETURN(-2)	-0.033110	0.018693	-1.771248	0.0765
Variance Equation				
C(4)	-0.202250	0.019591	-10.32372	0.0000
C(5)	0.154874	0.010317	15.01168	0.0000
C(6)	-0.043703	0.006210	-7.037825	0.0000
C(7)	0.989952	0.002078	476.4491	0.0000
R-squared	0.003984	Mean dependent var		-0.000150
Adjusted R-squared	0.003280	S.D. dependent var		0.017931
S.E. of regression	0.017901	Akaike info criterion		-5.538651
Sum squared resid	0.906551	Schwarz criterion		-5.523947
Log likelihood	7849.730	Hannan-Quinn criter.		-5.533346
Durbin-Watson stat	1.988211			

Πίνακας 11. Υπολογισμός EGARCH

Από τα υποδείγματα GARCH, EGARCH και TARARCH αυτό που έχει την χαμηλότερη τιμή AIC(Akaike) και SIC (Schwarz) είναι το TARARCH (Akaike info criterion -5.543114 Schwarz criterion -5.528410) και θεωρείται ότι είναι το καλύτερο με πολύ μικρή διαφορά όμως (best fitted model)

## **ΕΝΟΤΗΤΑ Η : ΠΡΟΒΛΕΠΤΙΚΗ ΙΚΑΝΟΤΗΤΑ ΤΩΝ ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΩΝ**

### Υπολογισμοί: Προβλεπτική Ικανότητα των υποδειγμάτων.

Θα χρησιμοποιηθούν δεδομένα του ΓΔ από τις 01/01/2014 έως 31/03/2014 (out of sample data) ώστε να αξιολογηθεί η ικανότητα των υποδειγμάτων. Το κριτήριο για την απόφαση αυτή είναι το μικρότερο εύρος μεταξύ της πρόβλεψης για την απόδοση του δείκτη και της πραγματικής τιμής της. Το σφάλμα της πρόβλεψης υπολογίζεται με την μέθοδο του μέσου απόλυτου σφάλματος (Mean Absolute Error) αλλά και της ρίζας του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (Root Mean Square Error).

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n |r_j - \hat{r}_j|, \quad RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (r_j - \hat{r}_j)^2}$$

Αρχικά υπολογίζεται η πρόβλεψη της επόμενης ημέρας με τα υποδείγματα που έχουν παρουσιαστεί μέχρι στιγμής Moving Average 30 ημερών, EWMA 30 ημερών, GARCH(1,1), TARCh και EGARCH. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται για δέκα ημέρες και για την πρόβλεψη της επόμενης ημέρας χρησιμοποιούνται όλες οι προηγούμενες ημερήσιες παρατηρήσεις. Στο τέλος υπολογίζεται ο μέσος όρος των σφαλμάτων ώστε να εξαχθεί το τελικό συμπέρασμα. Αρχικά στον παρακάτω πίνακα εμφανίζονται οι ημερήσιες προβλέψεις με το υπόδειγμα του κινητού μέσου όρου τριάντα ημερών (Forecast), οι πραγματικές αποδόσεις του δείκτη (Realized return) και το μέτρο σύγκρισης: η απόλυτη τιμή του σφάλματος (MAE) και η ρίζα του μέσου τετραγωνικού σφάλματος (RMSE). Επειδή η πρόβλεψη αφορά μόνο την επόμενη μέρα οι τιμές των MAE και RMSE είναι οι ίδιες.

Model	Date	Forecast	Realized return	MAE	RMSE	MAPE
MA	2/1/2014	1,72%	3,57%	0,01847	0,01847	
	3/1/2014	1,81%	0,05%	0,017642	0,017642	
	6/1/2014	1,81%	0,00%	0,018089	0,018089	
	7/1/2014	1,87%	2,66%	0,007979	0,007979	
	8/1/2014	1,96%	3,29%	0,013296	0,013296	
	9/1/2014	1,92%	0,82%	0,010928	0,010928	
	10/1/2014	1,87%	0,50%	0,013712	0,013712	
	13/1/2014	1,73%	-0,77%	0,025021	0,025021	
	14/1/2014	1,73%	-2,02%	0,037555	0,037555	
	15/1/2014	1,76%	1,81%	0,000474	0,000474	
			<b>Average =</b>	<b>0,016317</b>		

Πίνακας 12. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα κινητού μέσου

Επίσης υπολογίζεται ο μέσος όρος των δέκα ημερών ώστε να εξαχθεί το τελικό συμπέρασμα. Ο επόμενος πίνακας αφορά το υπόδειγμα Exponential Weighted Moving Average

Model	Date	Forecast	Realized return	MAE	RMSE	MAPE
<b>EWMA</b>	2/1/2014	1,72%	3,57%	0,01937	0,01937	n/a
	3/1/2014	1,81%	0,05%	0,017637	0,017637	n/a
	6/1/2014	1,81%	0,00%	0,017539	0,017539	n/a
	7/1/2014	1,87%	2,66%	0,009653	0,009653	n/a
	8/1/2014	1,96%	3,29%	0,015141	0,015141	n/a
	9/1/2014	1,92%	0,82%	0,010601	0,010601	n/a
	10/1/2014	1,87%	0,50%	0,011377	0,011377	n/a
	13/1/2014	1,73%	-0,77%	0,023054	0,023054	n/a
	14/1/2014	1,73%	-2,02%	0,035003	0,035003	n/a
	15/1/2014	1,76%	1,81%	0,003767	0,003767	n/a
			<b>Average =</b>	<b>0,016314</b>		

Πίνακας 13. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα EWMA

Έπειτα, το υπόδειγμα GARCH(1,1)

Model	Date	Forecast	Realized return	MAE	RMSE	MAPE
<b>GARCH(1,1)</b>	2/1/2014	0,07%	3,57%	0,035038	0,035038	98,09352
	3/1/2014	0,30%	0,05%	0,002583	0,002583	566,1253
	6/1/2014	-0,05%	0,00%	0,000515	0,000515	0
	7/1/2014	0,08%	2,66%	0,025817	0,002582	96,90141
	8/1/2014	0,25%	3,29%	0,030372	0,030372	92,44824
	9/1/2014	0,19%	0,82%	0,006369	0,006369	77,40855
	10/1/2014	0,01%	0,50%	0,004864	0,004864	98,13825
	13/1/2014	0,08%	-0,77%	0,008526	0,008526	110,9993
	14/1/2014	0,02%	-2,02%	0,020415	0,020415	100,8905
	15/1/2014	-0,01%	1,81%	0,018203	0,018203	100,6825
			<b>Average =</b>	<b>0,01527</b>		

Πίνακας 14. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα GARCH(1,1)



Ακολουθεί το υπόδειγμα TARARCH.

Model	Date	Forecast	Realized return	MAE	RMSE	MAPE
<b>TARARCH</b>	2/1/2014	0,04%	3,57%	0,035276	0,035276	98,75953
	3/1/2014	0,29%	0,05%	0,002447	0,002447	536,2287
	6/1/2014	-0,07%	0,00%	0,000671	0,000671	0
	7/1/2014	0,06%	2,66%	0,026064	0,026064	97,82533
	8/1/2014	0,23%	3,29%	0,030527	0,030527	92,91939
	9/1/2014	0,18%	0,82%	0,006431	0,006431	78,15777
	10/1/2014	0,00%	0,50%	0,004997	0,004997	100,8114
	13/1/2014	0,06%	-0,77%	0,008321	0,008321	108,3249
	14/1/2014	-0,01%	-2,02%	0,020154	0,020154	99,60167
	15/1/2014	-0,05%	1,81%	0,018542	0,018542	102,5597
			<b>Average =</b>	<b>0,015343</b>		

Πίνακας 15. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα TARARCH

Τέλος, ο πίνακας με το υπόδειγμα EGARCH.

Model	Date	Forecast	Realized return	MAE	RMSE	MAPE
<b>EGARCH</b>	2/1/2014	0,05%	3,57%	0,035174	0,035174	97,47582
	3/1/2014	0,30%	0,05%	0,002495	0,002495	546,8298
	6/1/2014	-0,05%	0,00%	0,00468	0,00468	0
	7/1/2014	0,07%	2,66%	0,025974	0,025974	97,48788
	8/1/2014	0,24%	3,29%	0,030475	0,030475	92,76076
	9/1/2014	0,19%	0,82%	0,00631	0,00631	76,68781
	10/1/2014	0,01%	0,50%	0,004821	0,004821	97,26493
	13/1/2014	0,08%	-0,77%	0,008433	0,008433	109,781
	14/1/2014	0,00%	-2,02%	0,020271	0,020271	100,1804
	15/1/2014	-0,04%	1,81%	0,018448	0,018448	102,0361
			<b>Average =</b>	<b>0,015708</b>		

Πίνακας 16. Πρόβλεψη και απόλυτο σφάλμα με το Υπόδειγμα EGARCH.

Το τελικό συμπέρασμα που προκύπτει από την τιμή του μέσου όρου των δέκα ημερών είναι ότι υπερισχύει το υπόδειγμα GARCH(1.1) το οποίο είναι αυτό με το μικρότερο εύρος λάθους και άρα το καλύτερο με βάσει τα δεδομένα που χρησιμοποιήθηκαν. Ακολουθεί ο σχετικός πίνακας με τα συγκεντρωτικά αποτελέσματα.

MODEL	AVERAGE MAE	AVERAGE RMSE
MA	0,016316619	0,016316619
EWMA	0,016314161	0,016314161
<b>GARCH(1,1)</b>	<b>0,0152702</b>	<b>0,0152702</b>
TARCH	0,015343	0,015343
EGARCH	0,0157081	0,0157081

Πίνακας 17. Συγκεντρωτικά αποτελέσματα - σύγκριση

## **ΕΝΟΤΗΤΑ Θ : ΣΤΟΧΑΣΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΛΗΤΟΤΗΤΑ**

## Στοχαστική μεταβλητότητα -Εισαγωγή

Μέχρι στιγμής έχουν παρουσιαστεί υποδείγματα τα οποία χρησιμοποιούν ιστορικά δεδομένα και η μεταβλητότητα είναι είτε σταθερή είτε αλλάζει με τον χρόνο. Από αυτά τα πιο πολύπλοκα: τα υπό συνθήκη ετεροσκεδαστικά υποδείγματα στα οποία χρησιμοποιείται μια συνάρτηση η οποία περιγράφει την εξέλιξη της μεταβλητότητας στο χρόνο. Στο υπόδειγμα GARCH(1,1) η διακύμανση στο χρόνο  $t$  προσδιορίζεται από την διακύμανση σε χρόνο  $t-1$  και τις αποδόσεις σε χρόνο  $t-1$  ενώ τα στοχαστικά υποδείγματα στηρίζονται σε μια διαφορετική προσέγγιση. Σε ένα υπόδειγμα στοχαστικής μεταβλητότητας η διακύμανση (μεταβλητότητα) μεταβάλλεται τυχαία ως μια στοχαστική διαδικασία δηλαδή αλλάζει στον χρόνο με αβέβαιο τρόπο. Η στοχαστική διαδικασία που χρησιμοποιείται κάθε φορά για να περιγράψει την μεταβλητότητα αποτελεί και ένα διαφορετικό υπόδειγμα. Αυτή μπορεί να ακολουθεί μια γεωμετρική κίνηση Brown ή την επανερχόμενη στο μέσο Gaussian διαδικασία Ornstein Uhlenbeck και παραλλαγές αυτών. Στα στοχαστικά υποδείγματα μέρος της μεταβλητότητας οφείλεται σε τυχαία σοκ.

Ακολουθώντας την σημειογραφία που έχει χρησιμοποιηθεί έως τώρα θα γίνει μια εισαγωγή στο στοχαστικό υπόδειγμα για την διακύμανση. Αν υποθέσουμε ότι οι αποδόσεις είναι :  $r_t = \mu_t + \sigma_t \varepsilon_t$  θα συγκριθεί με ένα υπόδειγμα EGARCH(1,1) το οποίο εκφράζει την διακύμανση ως εξής :

$$\ln(\sigma_t) = \omega + \alpha_1(r_{t-1} - \mu)^2 + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1})$$

ενώ σε ένα τυπικό στοχαστικό υπόδειγμα η διακύμανση θα εκφραζόταν ως εξής:

$$\ln(\sigma_t) = \omega + \beta_1 \ln(\sigma_{t-1}) + v_t$$

όπου ο νέος όρος που εισάγεται  $v_t$  είναι μια iid τυχαία μεταβλητή ενώ  $v_t$  και  $\varepsilon_t$  είναι στοχαστικά ανεξάρτητες. Ένας πιο τυπικός τρόπος με τον οποίο εκφράζεται η στοχαστική μεταβλητότητα είναι ο εξής :

$$h_t = \omega + \phi \ln h_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$$

όπου  $h_t$  είναι ο λογάριθμος του  $\sigma_t$ ,  $\phi$  είναι ο συντελεστής που δείχνει την επιμονή στην μεταβλητότητα και αν  $|\phi| < 1$  τότε είναι στάσιμη,  $I(0)$ . Όπως και στα υποδείγματα GARCH τα στοχαστικά υποδείγματα παρουσιάζουν κυρτότητα  $>3$  και θετική αυτοσυσχέτιση των τετραγώνων των καταλοίπων.

Στα στοχαστικά υποδείγματα μεταβλητότητας οι αποδόσεις  $r$  οι οποίες προέρχονται από ένα πιθανοτικό υπόδειγμα  $f(r|h)$  όπου  $h$  είναι ένα διάνυσμα από μεταβλητότητες το οποίο έχει μια πιθανοτική δομή  $f(h|\theta)$  όπου  $\theta$  είναι ένα διάνυσμα παραμέτρων (Jacquier 1994, Shephard 1996). Στη τυπική του μορφή ένα υπόδειγμα στοχαστικής μεταβλητότητας εκφράζεται ως μια AR(1) διαδικασία αυτοσυσχέτισης :

$$h_t = \phi h_{t-1} + \eta_t$$

και οι αποδόσεις δίνονται από το τύπο

$$r_t = \beta \exp\left(\frac{h_t}{2}\right) \varepsilon_t$$

όπου  $\eta_t$  και  $\varepsilon_t$  είναι ανεξάρτητες διαδικασίες (iid)  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$  και  $h_0 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2)$ .

Στη συνέχεια θα παρουσιαστούν δύο από τα πιο σημαντικά υποδείγματα αυτής της μορφής. Το υπόδειγμα Taylor (1982,1986), που είναι το πρώτο υπόδειγμα σε διακριτό χρόνο και προσθέτει μια συγκεκριμένη πηγή στοχαστικότητας στην εξίσωση της μεταβλητότητας και η μεταβλητότητα εκφράζεται ως εξής:

$$h_{t+1} = \mu + (\phi h_t - \mu) + \eta_t$$

όπου  $\mu$  ο μακροχρόνιος μέσος της λογαριθμικής μεταβλητότητας,  $\phi$  η παράμετρος επιμονής της μεταβλητότητας με  $|\phi| < 1$  ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη στασιμότητας.

Δεύτερον, το υπόδειγμα του Heston (1993) το οποίο είναι μια επέκταση του υποδείματος των Black and Scholes (1973) στο οποίο έγινε αναφορά σε προηγούμενο κεφάλαιο στην τεκμαρτή μεταβλητότητα. Σε αντίθεση με την υπόθεση των Black and Scholes ότι δηλαδή οι αποδόσεις των μετοχών ακολουθούν κανονική κατανομή με γνωστό μέσο και σταθερή διακύμανση στο υπόδειγμα αυτό η μεταβλητότητα ακολουθεί μια στοχαστική διαδικασία. Οι στατιστικές ιδιότητες της μόχλευσης, της επιστροφής στο μέσο και της μη κανονικότητας των αποδόσεων συμπεριλαμβάνονται σε αυτό το υπόδειγμα. Αρχικά υποθέτοντας ότι η τιμή μια μετοχής ακολουθεί μια στοχαστική διαφορική εξίσωση :

$$dS(t) = \mu S dt + \sqrt{v_t} S dW_t, \quad (\sqrt{v_t} = \sigma_t^2)$$

Τότε η μεταβλητότητα εκφράζεται ως εξής:

$$dV_t = \theta(\alpha - V_t)dt + \xi\sqrt{v_t} dW_t^\sigma$$

όπου  $S(t)$  η τιμή του υποκείμενου τίτλου (καθώς το υπόδειγμα αφορά την τιμολόγηση και την μεταβλητότητα δικαιωμάτων – options) ,  $\mu$  η μέση τιμή ,  $v_t$  η διακύμανση ,  $W_t$  και  $W_t^\sigma$  είναι διαδικασίες Wiener ή αλλιώς τυπικές κινήσεις Brown όπου η πρώτη αφορά την τιμή  $S$  και η δεύτερη την μεταβλητότητα,  $\theta$  ο βαθμός επιστροφής στο μέσο,  $\alpha$  η μακροχρόνια διακύμανση και  $\xi$  η μεταβλητότητα της διακύμανσης. Οι διαδικασίες Wiener έχουν συσχέτιση  $dW_t W_t^\sigma = \rho dt$  .

Τα στοχαστικά υποδείγματα δεν μπορούν να υπολογιστούν άμεσα με διαδικασίες μέγιστης πιθανοφάνειας. Ο υπολογισμός τους είναι πιο δύσκολος και πέρα από το όρια αυτής της εργασίας. Οι κυριότερες μέθοδοι υπολογισμού αυτών είναι η γενικευμένη μέθοδος ροπών (GMM) Melino Turnbull (1990) , η μέθοδος της ψευδο-μέγιστης πιθανοφάνειας (QMLE) Harvey (1994) και αρκετές μέθοδοι προσομοιώσεων όπως η ολοκλήρωση Monte Carlo η οποία χρησιμοποιεί μαρκοβιανές αλυσίδες (Markov Chain Monte Carlo – MCMC) .

## **ΕΝΟΤΗΤΑ Ι : ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ – ΕΠΙΛΟΓΟΣ**

## Κριτική των υποδειγμάτων – Πλεονεκτήματα Μειονεκτήματα

Στην εργασία αυτή έχουν παρουσιαστεί διαφορετικά υποδείγματα για τον υπολογισμό και την πρόβλεψη της μεταβλητότητας. Ξεκινώντας από τα πιο απλά υποδείγματα ιστορικής μεταβλητότητας τα οποία δίνουν την ίδια βαρύτητα σε όλες τις ιστορικές παρατηρήσεις ή και ακόμη το υπόδειγμα εκθετικού σταθμισμένου κινητού μέσου όρου το οποίο δίνει μεγαλύτερη βαρύτητα σε πρόσφατες παρατηρήσεις αποτυγχάνουν να συμπεριλάβουν τις στατιστικές ιδιότητες των χρονολογικών σειρών των αποδόσεων. Ειδικά το απλό υπόδειγμα ιστορικού μέσου όρου δεν καταφέρνει να έχει το δυναμικό χαρακτήρα που απαιτείται και θεωρεί την διακύμανση σταθερή. Παρόλα αυτά, η χρησιμότητα τους είναι σημαντική από τους αναλυτές λόγω της απλότητας που παρουσιάζουν. Επίσης, η ιδέα της σταθερής μεταβλητότητας χρησιμοποιήθηκε από τους Black and Scholes στην εξίσωση τιμολόγησης των δικαιωμάτων.

Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν τα υποδείγματα της οικογένειας ARCH με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα τα οποία είναι πιο δύσκολα στον υπολογισμό αλλά καταφέρνουν να συμπεριλάβουν στατιστικές ιδιότητες όπως η λεπτοκυρτότητα, η αρνητική έκταση ασυμμετρίας (βαριές ουρές) και το φαινόμενο της συσσώρευσης της μεταβλητότητας. Στη συνέχεια, προκειμένου να συμπεριληφθούν και άλλες στατιστικές ιδιότητες όπως της μόχλευσης όπου οι αρνητικές τιμές επηρεάζουν περισσότερο την μεταβλητότητα έχουν επεκταθεί τα συγκεκριμένα υποδείγματα με διάφορες παραλλαγές (EGARCH, TGARCH κτλ.). Από την ανάλυση μας, φάνηκε ότι το υπόδειγμα GARCH(1.1) είναι το καλύτερο όσον αφορά την προβλεπτική ικανότητα του Γενικού Δείκτη. Το κυριότερο μειονέκτημα των υποδειγμάτων είναι ότι επειδή χρησιμοποιούν ιστορικά δεδομένα δεν μπορούν πάντα να συμπεριλαμβάνουν όλη την πληροφόρηση και για αυτό πολλές φορές αποτυγχάνουν να δίνουν αποτελεσματική πρόβλεψη, ειδικά όταν ο δείκτης δεν κινείται <<ομαλά>>.

Για το λόγο αυτό δημιουργήθηκαν τα στοχαστικά υποδείγματα τα οποία χρησιμοποιούν μια στοχαστική διαφορική εξίσωση για τον υπολογισμό της διακύμανσης. Τα υποδείγματα αυτά καταφέρνουν να συμπεριλάβουν τις περισσότερες από τις στατιστικές ιδιότητες των αποδόσεων των χρονολογικών σειρών αλλά είναι πιο απαιτητικά στον υπολογισμό τους. Επειδή είναι λάθος κάποιος να πιστεύει ότι οι τιμές των περιουσιακών προϊόντων και ενός χρηματιστηριακού δείκτη εξελίσσεται ανεξάρτητα από το περιβάλλον του και ότι όλη η πληροφόρηση



ενσωματώνεται στις προηγούμενες παρατηρήσεις αναπτύχθηκαν τα στοχαστικά υποδείγματα. Στη συνέχεια θα παρουσιαστεί μια περίληψη των ερευνών τα οποία χρησιμοποιούν τα παραπάνω υποδείγματα ώστε να υπάρχει μια εικόνα για το ποιά παράγουν τα καλύτερα αποτελέσματα.

#### Αντιπαράθεση των υποδειγμάτων

Μετά από σχετική έρευνα που εκπονήθηκε για το ποιό υπόδειγμα μεταβλητότητας είναι καλύτερο με βάσει διάφορες εργασίες που έχουν δημοσιευτεί αυτό που είναι άξιο αναφοράς είναι ότι πρέπει να γίνει διαχωρισμός όσον αφορά τον χρονικό ορίζοντα της πρόβλεψης, την χρονική συχνότητα των δεδομένων (ημερήσια , εβδομαδιαία, μηνιαία), το χρηματοοικονομικό προϊόν της πρόβλεψης (ισοτιμία , χρηματιστηριακός δείκτης) , την μέθοδο της πρόβλεψης και το κριτήριο της αξιολόγησης. Επίσης τα αποτελέσματα είναι διαφορετικά αν εξετάζεται η ικανότητα του υποδείγματος για πρόβλεψη ή με βάσει την αξία υπό κίνδυνο (VaR). Αν κάποια από τις παραπάνω παραμέτρους αλλάξει μπορεί να οδηγήσει και σε διαφορετικό αποτέλεσμα.

Τα αποτελέσματα των ερευνών δεν δίνουν ξεκάθαρα αποτελέσματα, ενδεικτικά θα αναφερθούν κάποια από αυτά όπου φαίνεται ότι έρχονται σε αντίθεση μεταξύ τους. Στο τεχνικό έγγραφο της RiskMetrics (1995) σημειώνεται ότι 'Δεδομένης της επιπλέον πολυπλοκότητας των υποδειγμάτων GARCH και της μικρής βελτίωσης στην προβλεπτική ικανότητα για την διαχείριση κινδύνου έχουμε επιλέξει να υπολογίζουμε την μεταβλητότητα χρησιμοποιώντας εκθετικούς σταθμισμένους κινητούς μέσους όρους'. Οι Lehar Scheisher και Schittenkopf (2002) συγκρίνουν τα στοχαστικά υποδείγματα με το υπόδειγμα GARCH και καταλήγουν ότι το τελευταίο είναι ανώτερο στον υπολογισμό της τιμής των δικαιωμάτων αλλά δεν ισχύει το ίδιο για τον υπολογισμό της αξίας υπό κίνδυνο (Var). Το στοχαστικό υπόδειγμα υπερисχύει σύμφωνα με τον Heynen (1995) για τον χρηματιστηριακό δείκτη στις ΗΠΑ, στο Ηνωμένο Βασίλειο , Ιαπωνία και Αυστραλία και από τον Yu (2000) για τον Χρηματιστηριακό δείκτη της Νεας Ζηλανδίας. Σε αντίθεση , οι Bluhm και Yu (2001) καταλήγουν ότι το στοχαστικό υπόδειγμα δεν υπερисχύει από το GARCH όσον αφορά την αξία υπο κίνδυνο ενώ υπερисχύει για τον υπολογισμό της τιμής του δικαιώματος. Ο Pegan και Schwert (1990) εμφανίζουν το EGARCH ως το καλύτερο μεταξύ μη παραμετρικών μεθόδων και οι Cumby et el (1993) βρίσκουν το EGARCH

ανώτερο των απλών ιστορικών μεθόδων. Ο Figlewski (1997) βρίσκει ότι η υπεροχή του GARCH εμφανίζεται κυρίως στις μετοχικές αγορές και μόνο για σύντομο χρονικό ορίζοντα πρόβλεψης και οι Cao και Tsay (1992) βρίσκουν ότι το TARARCH δίνει καλύτερες προβλέψεις για μετοχικούς δείκτες μεγάλης κεφαλαιοποίησης και το EGARCH δίνει τις καλύτερες προβλέψεις για δείκτες μικρής κεφαλαιοποίησης. Ο Lopez (2001), δε βρίσκει καμία αξιοσημείωτη διαφορά ανάμεσα στη στοχαστική μεταβλητότητα και σε άλλες προβλέψεις βασισμένες σε ανάλυση χρονοσειρών. Τέλος θα γίνει αναφορά στη εργασία των Poon και Granger (2003) στην οποία διεξάγεται μια συνολική έρευνα και σύγκριση όλων των ερευνών σχετικά με τα υποδείγματα μεταβλητότητας. Στη συνέχεια παραθέτουμε το σχετικό πίνακα των αποτελεσμάτων τους.

	Number of Studies
HISVOL > GARCH	22
GARCH > HISVOL	17
HISVOL > ISD	8
ISD > HISVOL	26
GARCH > ISD	1
ISD > GARCH	17
SV > HISVOL	3
SV > GARCH	3
GARCH > SV	1
ISD > SV	1

Πίνακας 18. Συγκριτική έρευνα υποδειγμάτων από βιβλιογραφία.

Όπου HISVOL αφορά υπόδειγμα ιστορικής μεταβλητότητας, GARCH υπόδειγμα γενικευμένης αυτοπαλινδρομούμενης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας, SV υπόδειγμα στοχαστικής μεταβλητότητας και ISD τεκμαρτής μεταβλητότητας (Implied Standard Deviation) υποδείγματα. Από τα παραπάνω είναι εμφανές ότι κανένα υπόδειγμα δεν είναι ξεκάθαρα καλύτερο του άλλου. Υπάρχει ένα σχετικό προβάδισμα της τεκμαρτής μεταβλητότητας με τα υποδείγματα της οικογένειας ARCH και τα στοχαστικά υποδείγματα να ακολουθούν και την ιστορική μεταβλητότητα τελευταία.

### Επίλογος

Η μεταβλητότητα είναι μια παράμετρος η οποία χρησιμοποιείται σχεδόν σε κάθε πτυχή της χρηματοοικονομικής επιστήμης. Όπως φάνηκε από τα τελευταία κεφάλαια υπάρχουν διάφορα ανταγωνιστικά υποδείγματα μεταβλητότητας των αποδόσεων τα

οποία στηρίζονται σε διαφορετικές υποθέσεις. Όλα προσπαθούν να αναπαράγουν με τον αποτελεσματικότερο τρόπο τις στατιστικές ιδιότητες που έχουν παρατηρηθεί και να υπολογίσουν τις αποτελεσματικότερες προβλέψεις.

Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσει κάποια από τα υποδείγματα της μεταβλητότητας, να την υπολογίσει και να συγκρίνει τα αποτελέσματα των προβλέψεων. Ξεκινώντας, από τα απλά μέτρα της ιστορικής μεταβλητότητας και του εκθετικού σταθμισμένου κινητού μέσου όρου στην συνέχεια παρουσιάστηκε η έννοια της τεκμαρτής μεταβλητότητας. Έπειτα παρουσιάστηκαν τα υποδείγματα με δεσμευμένη ετεροσκεδαστικότητα και οι διάφορες επεκτάσεις αυτών τα οποία είναι σαφώς πιο πολύπλοκα. Επίσης, έγινε μια εισαγωγή στο στοχαστικό υπόδειγμα της μεταβλητότητας.

Όσον αφορά το εμπειρικό κομμάτι της εργασίας, χρησιμοποιήθηκε ένα  $AR(2)$   $GARCH(1,1)$  υπόδειγμα και υπολογίστηκε (με ιστορικά δεδομένα δεκαετίας) η μεταβλητότητα της επόμενης ημέρας για τις επόμενες δέκα μέρες. Η πρόβλεψη της επόμενης ημέρας πραγματοποιήθηκε με το υπόδειγμα του ιστορικού μέσου όρου, με το υπόδειγμα του εκθετικού μέσου όρου και με τα υποδείγματα  $GARCH(1,1)$ ,  $TARCH$  και  $EGARCH$ . Με κριτήριο την μέθοδο του απόλυτου μέσου σφάλματος και με βάση τον μέσο όρο των δέκα ημερών το αποτελεσματικότερο υπόδειγμα από άποψη προβλεψιμότητας είναι το  $GARCH(1,1)$ . Με το υπόδειγμα γενικευμένης αυτοπαλινδρομούμενης δεσμευμένης ετεροσκεδαστικότητας φάνηκε ότι η επιλογή της κανονικής κατανομής σε σχέση με την  $t$ -student και της  $GED$  κατανομή δεν έχει διαφορά στην εκτίμηση των παραμέτρων. Επίσης, το υπόδειγμα  $TARCH$  είναι το καλύτερα προσαρμοσμένο στα δεδομένα (best fitted) με βάσει τα κριτήρια  $AIC$  και  $SIC$ .

Κλείνοντας την εργασία αξίζει να γίνει ένας σχολιασμός ότι από το σύνολο των ερευνών μέχρι σήμερα δεν έχει υπάρξει μια συμφωνία ως προς το πιο είναι το <<καλύτερο>> υπόδειγμα.

## ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Akgiray, V. and G. C. Booth, 1988, The stable-law model of stock returns, *Journal of Business and Economic Statistics*, Vol. 16, pp. 51-57.

Black F. and Scholes M., 1973, The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy*, Vol. 81, pp. 637-641.

Black F, 1976, Studies in the stock price volatility changes, Proceedings of the 1976 Business meeting of the business and economic statistics section, American statistical council.

Bluhm H.H.W. and J. Yu, 2001, Forecasting volatility: Evidence from the German stock market, *Working paper, University of Auckland*.

Bollerslev T., 1986, Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity, *Journal of Econometrics*, Vol. 31, pp. 307-327.

Campbell, J. Y., Lo, A. W., and MacKinlay, A.C., 1997, *The econometrics of financial markets*, Princeton, New Jersey, Princeton University press.

Cao, C.Q. and Tsay, R.S., (1992), Nonlinear Time-Series Analysis of Stock Volatilities, *Journal of Applied Econometrics*, 1, pp. 165-185.

Cornell B, 1978, Using the option pricing model to measure the uncertainty producing effect of major announcements, *Financial Management* 7, p.p 54-59

Cumby R, Figlewski S and Hasbrouck J., 1993, Forecasting volatilities and correlations with EGARCH models, *Journal of Derivatives*, 1 p.p. 51-63.

Engle R.F., Lillien D.M. and Robins R.P., 1987, Estimating time-varying risk premia in the term structure: The ARCH-M model, *Econometrica* 55, 391-408.

Engle, R. F., 1982, Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation, *Econometrica*, Vol. 50, pp. 987-1007.

Mandelbrot B., 1963, The variation of certain speculative prices, *Journal of business*, Vol. 36, pp. 394-419.

Nelson, D., 1991, Conditional heteroscedasticity in asset returns: a new approach, *Econometrica*, Vol. 59, pp. 349-370.

Fama E., 1965, The behaviour of stock market prices, *Journal of Business*, Vol. 38, pp. 34-105

Fielitz, B. and J. Rozelle, 1983, Stable distributions and the mixtures of distributions hypothesis for common stock returns, *Journal of the American Statistical Association*, Vol. 78, pp. 28-36.

- Figlewski S., (1997), Forecasting Volatility. *Financial Markets, Institutions and Instruments*, 6, pp 1-88.
- Fouque J. P., Papanikolaou G. and Sircar K. R., 2000, Derivatives in financial markets with stochastic volatility, Cambridge University press.
- Glosten, L., R. Jagannathan and D. Runkle, 1993, On the relation between expected return on stocks, *Journal of Finance*, vol. 48, pp. 1779-1801.
- Hamilton, J. D., and Susmuel R., 1994, Autoregressive conditional heteroscedasticity and changes in regime, *Journal of Econometrics*, Vol. 64, pp. 307-333.
- Harris L., 1986 , A transaction data study of weekly and intraday patterns in stock returns, *Journal of Financial Economics* , 16, p.p 99-117.
- Harvey A. C., Ruiz E. and Shepard N., 1994, Multivariate stochastic variance models, *Review of Economic Studies*, Vol 61, pp. 247-264.
- Harvey C, Huang R, 1992, Information trading and fixed income volatility, *The Journal of Portfolio Management* , 6, p.p.14-22.
- Heston, S.L., 1993, A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Application to Bond and Currency Options, *The Review of Financial Studies*, Vol. 6, 327-343.
- Heynen R.C., 1995, Essays on Derivatives Pricing Theory, Thesis Publishers, Amersterdam.
- Hull, J.C., 2003, Options futures and other derivatives, fifth edition, Prentice Hall.
- Lehar A., Scheicher M., and Schittenkopf, 2002, GARCH vs. stochastic volatility: Option pricing and risk management, *Journal of banking and Finance*, Vol. 26, 323-345.
- Lopez, J.A., (2001), Evaluating the predictive accuracy of volatility models. *Journal of Forecasting*, 20, pp. 87-109.
- Melino, A., and Turnbull, S., 1995, Misspecification and the pricing and hedging of long-term foreign currency options, *Journal of International Money and Finance*, Vol. 14, pp. 373-393.
- Poon S.H. and Granger W.J., 2003, Forecasting volatility in financial markets: A review. *Journal of Economic Literature* ,p.p. 478-539.
- Rama C., 2001, Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues, *Institute of physics publishing*, Vol. 1, 223-236.
- Pegan A.R. and Schwert G.W. (1990), Alternative models for conditional stock volatility, *Journal of Econometrics*,45,p.p. 267-290.
- Taylor S. J., 1986, Modelling financial time series, Jhon Wiley, Chichester.

Whaley R. E., 1993, Derivatives on market volatility: Hedging tools long overdue, *Journal of Derivatives* 1, p.p. 71-84.

Zakoian J.M., 1994, Thresold heteroskedastic models, *Journal of Economic Dynamics and control* ,18, 931-955.

## Παράρτημα

Null Hypothesis: INDEX has a unit root – non stationary

Exogenous: None

Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=27)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-0.551544	0.4784
Test critical values:		
1% level	-2.565779	
5% level	-1.940936	
10% level	-1.616624	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(INDEX)

Method: Least Squares

Date: 02/15/14 Time: 18:19

Sample (adjusted): 1/06/2003 12/31/2013

Included observations: 2833 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INDEX(-1)	-0.000146	0.000265	-0.551544	0.5813
D(INDEX(-1))	0.062864	0.018757	3.351592	0.0008
R-squared	0.004022	Mean dependent var		-0.216548
Adjusted R-squared	0.003670	S.D. dependent var		38.54292
S.E. of regression	38.47212	Akaike info criterion		10.13845
Sum squared resid	4190174.	Schwarz criterion		10.14265
Log likelihood	-14359.11	Hannan-Quinn criter.		10.13997
Durbin-Watson stat	1.996997			

Null Hypothesis: INDEX has a unit root – non stationary

Exogenous: Constant, Linear Trend

Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=27)

		t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic		-1.718988	0.7429
Test critical values:	1% level	-3.961282	
	5% level	-3.411393	
	10% level	-3.127547	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(INDEX)

Method: Least Squares

Date: 02/15/14 Time: 18:28

Sample (adjusted): 1/06/2003 12/31/2013

Included observations: 2833 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
INDEX(-1)	-0.001140	0.000663	-1.718988	0.0857
D(INDEX(-1))	0.062085	0.018755	3.310272	0.0009
C	5.773771	2.804620	2.058664	0.0396
@TREND("1/02/2003")	-0.002287	0.001053	-2.171491	0.0300
R-squared	0.005744	Mean dependent var		-0.216548
Adjusted R-squared	0.004690	S.D. dependent var		38.54292
S.E. of regression	38.45243	Akaike info criterion		10.13813
Sum squared resid	4182929.	Schwarz criterion		10.14653
Log likelihood	-14356.66	Hannan-Quinn criter.		10.14116
F-statistic	5.448138	Durbin-Watson stat		1.996945
Prob(F-statistic)	0.000984			



Null Hypothesis: LOG\_RETURN has a unit root - non stationary

Exogenous: Constant, Linear Trend

Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=27)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-49.95044	0.0000
Test critical values: 1% level	-3.961282	
5% level	-3.411393	
10% level	-3.127547	

\*MacKinnon (1996) one-sided p-values.

Augmented Dickey-Fuller Test Equation

Dependent Variable: D(LOG\_RETURN)

Method: Least Squares

Date: 02/15/14 Time: 22:09

Sample (adjusted): 1/03/2003 12/30/2013

Included observations: 2833 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
LOG_RETURN(-1)	-0.937111	0.018761	-49.95044	0.0000
C	0.000547	0.000673	0.812773	0.4164
@TREND("1/02/2003")	-4.85E-07	4.11E-07	-1.178677	0.2386
R-squared	0.468549	Mean dependent var		1.60E-06
Adjusted R-squared	0.468174	S.D. dependent var		0.024536
S.E. of regression	0.017893	Akaike info criterion		-5.207733
Sum squared resid	0.906072	Schwarz criterion		-5.201433
Log likelihood	7379.753	Hannan-Quinn criter.		-5.205460
F-statistic	1247.523	Durbin-Watson stat		1.993877
Prob(F-statistic)	0.000000			

Date	Γεν Δείκτης	log return	Log return- Mean	(Log Return - Mean)^2
15/11/2013	1133,46	0,69%	0,69%	0,00%
18/11/2013	1141,33	0,33%	0,33%	0,00%
19/11/2013	1145,09	-0,74%	-0,74%	0,01%
20/11/2013	1136,65	0,45%	0,45%	0,00%
21/11/2013	1141,83	2,34%	2,34%	0,05%
22/11/2013	1168,90	2,44%	2,44%	0,06%
25/11/2013	1197,79	-3,93%	-3,93%	0,15%
26/11/2013	1151,66	2,08%	2,08%	0,04%
27/11/2013	1175,82	0,42%	0,42%	0,00%
28/11/2013	1180,77	1,25%	1,25%	0,02%
29/11/2013	1195,68	2,69%	2,69%	0,07%
2/12/2013	1228,23	-0,59%	-0,59%	0,00%
3/12/2013	1220,98	-0,76%	-0,76%	0,01%
4/12/2013	1211,77	-1,79%	-1,79%	0,03%
5/12/2013	1190,31	-1,10%	-1,10%	0,01%
6/12/2013	1177,34	0,47%	0,47%	0,00%
9/12/2013	1182,93	1,49%	1,49%	0,02%
10/12/2013	1200,67	-0,31%	-0,31%	0,00%
11/12/2013	1196,98	-0,84%	-0,84%	0,01%
12/12/2013	1186,93	-2,58%	-2,58%	0,07%
13/12/2013	1156,74	-0,86%	-0,86%	0,01%
16/12/2013	1146,88	-0,02%	-0,02%	0,00%
17/12/2013	1146,69	-0,04%	-0,04%	0,00%
18/12/2013	1146,26	0,81%	0,81%	0,01%
19/12/2013	1155,53	-2,78%	-2,78%	0,08%
20/12/2013	1123,86	-1,05%	-1,05%	0,01%
23/12/2013	1112,08	0,00%	0,00%	0,00%
24/12/2013	1112,08	4,67%	4,67%	0,22%
27/12/2013	1165,24	-0,62%	-0,62%	0,00%
30/12/2013	1158,03	0,40%	0,40%	0,00%
31/12/2013	1162,68			
	Sum	2,55%	Sum	0,89%
	Sum/30=Mean	0,08%	Sum/29	0,03%
			Std Dev	1,75%
			Annual Std	27,74%

				lambda	94,00%
				EWMA	0,0267%
				Std. Dev	1,6349%
				Annual S.Dev	25,8503%
Date	Γεν Δείκτης	log return	Log return Squared	weights	
15/11/2013	1133,46	0,69%	0,004788%	1,00%	0,000048%
18/11/2013	1141,33	0,33%	0,001082%	1,06%	0,000011%
19/11/2013	1145,09	-0,74%	0,005473%	1,13%	0,000062%
20/11/2013	1136,65	0,45%	0,002067%	1,20%	0,000025%
21/11/2013	1141,83	2,34%	0,054901%	1,28%	0,000701%
22/11/2013	1168,90	2,44%	0,059609%	1,36%	0,000810%
25/11/2013	1197,79	-3,93%	0,154243%	1,45%	0,002230%
26/11/2013	1151,66	2,08%	0,043104%	1,54%	0,000663%
27/11/2013	1175,82	0,42%	0,001765%	1,64%	0,000029%
28/11/2013	1180,77	1,25%	0,015746%	1,74%	0,000274%
29/11/2013	1195,68	2,69%	0,072141%	1,85%	0,001336%
2/12/2013	1228,23	-0,59%	0,003505%	1,97%	0,000069%
3/12/2013	1220,98	-0,76%	0,005733%	2,10%	0,000120%
4/12/2013	1211,77	-1,79%	0,031928%	2,23%	0,000712%
5/12/2013	1190,31	-1,10%	0,012004%	2,37%	0,000285%
6/12/2013	1177,34	0,47%	0,002244%	2,52%	0,000057%
9/12/2013	1182,93	1,49%	0,022157%	2,68%	0,000595%
10/12/2013	1200,67	-0,31%	0,000947%	2,86%	0,000027%
11/12/2013	1196,98	-0,84%	0,007109%	3,04%	0,000216%
12/12/2013	1186,93	-2,58%	0,066381%	3,23%	0,002145%
13/12/2013	1156,74	-0,86%	0,007328%	3,44%	0,000252%
16/12/2013	1146,88	-0,02%	0,000003%	3,66%	0,000000%
17/12/2013	1146,69	-0,04%	0,000014%	3,89%	0,000001%
18/12/2013	1146,26	0,81%	0,006488%	4,14%	0,000269%
19/12/2013	1155,53	-2,78%	0,077228%	4,40%	0,003401%
20/12/2013	1123,86	-1,05%	0,011103%	4,68%	0,000520%
23/12/2013	1112,08	0,00%	0,000000%	4,98%	0,000000%
24/12/2013	1112,08	4,67%	0,218042%	5,30%	0,011560%
27/12/2013	1165,24	-0,62%	0,003852%	5,64%	0,000217%
30/12/2013	1158,03	0,40%	0,001606%	6,00%	0,000096%
31/12/2013	1162,68				

Παράρτημα 3

Breusch-Godfrey Serial Correlation LM Test:

F-statistic	0.748496	Prob. F(2,2827)	0.4732
Obs*R-squared	1.498847	Prob. Chi-Square(2)	0.4726

Test Equation:

Dependent Variable: RESID

Method: Least Squares

Date: 03/31/14 Time: 21:38

Sample: 1/07/2003 12/31/2013

Included observations: 2832

Presample missing value lagged residuals set to zero.

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	-6.43E-05	0.000365	-0.176395	0.8600
LOG_RETURN(-1)	-0.469849	0.649979	-0.722867	0.4698
LOG_RETURN(-2)	0.036942	0.358838	0.102948	0.9180
RESID(-1)	0.470966	0.649910	0.724664	0.4687
RESID(-2)	-0.007200	0.392834	-0.018328	0.9854
R-squared	0.000529	Mean dependent var		1.40E-18
Adjusted R-squared	-0.000885	S.D. dependent var		0.017874
S.E. of regression	0.017882	Akaike info criterion		-5.208306
Sum squared resid	0.903955	Schwarz criterion		-5.197803
Log likelihood	7379.961	Hannan-Quinn criter.		-5.204517
F-statistic	0.374248	Durbin-Watson stat		1.999918
Prob(F-statistic)	0.827150			

Date: 04/04/14 Time: 21:18 TARCH – No serial correlation

Sample: 1/02/2003 12/31/2013

Included observations: 2832

Autocorrelation		Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob*	
				1	-0.025	-0.025	1.7842	0.182
				2	0.007	0.007	1.9287	0.381
				3	0.043	0.043	7.1965	0.066
				4	0.016	0.018	7.9092	0.095
				5	0.009	0.009	8.1384	0.149
				6	-0.001	-0.003	8.1420	0.228
				7	0.002	-0.000	8.1485	0.320
				8	-0.009	-0.010	8.3837	0.397
				9	0.007	0.006	8.5066	0.484
				10	-0.004	-0.003	8.5440	0.576
				11	0.002	0.003	8.5557	0.663
				12	-0.020	-0.020	9.7113	0.641
				13	-0.003	-0.004	9.7416	0.715
				14	-0.007	-0.007	9.8828	0.771
				15	0.023	0.024	11.346	0.728
				16	-0.013	-0.010	11.795	0.758
				17	-0.030	-0.030	14.372	0.641
				18	-0.000	-0.004	14.372	0.705
				19	0.015	0.016	14.990	0.723
				20	-0.008	-0.005	15.178	0.766
				21	-0.026	-0.025	17.171	0.701
				22	-0.000	-0.003	17.172	0.754
				23	0.005	0.006	17.248	0.797
				24	-0.012	-0.011	17.681	0.818
				25	-0.010	-0.010	17.979	0.843
				26	0.002	0.002	17.996	0.876
				27	-0.018	-0.016	18.974	0.871
				28	-0.003	-0.003	19.001	0.898
				29	-0.003	-0.004	19.031	0.920
				30	-0.022	-0.021	20.380	0.906
				31	-0.013	-0.013	20.896	0.915
				32	-0.027	-0.026	23.029	0.877
				33	0.008	0.007	23.217	0.897
				34	-0.014	-0.013	23.769	0.905
				35	-0.001	0.002	23.770	0.925
				36	-0.005	-0.003	23.852	0.940

Heteroskedasticity Test: ARCH foe TARCH – No  
ARCH EFFECT

F-statistic	1.781868	Prob. F(1,2829)	0.1820
Obs*R-squared	1.782006	Prob. Chi-Square(1)	0.1819

Test Equation:

Dependent Variable: WGT\_RESID^2

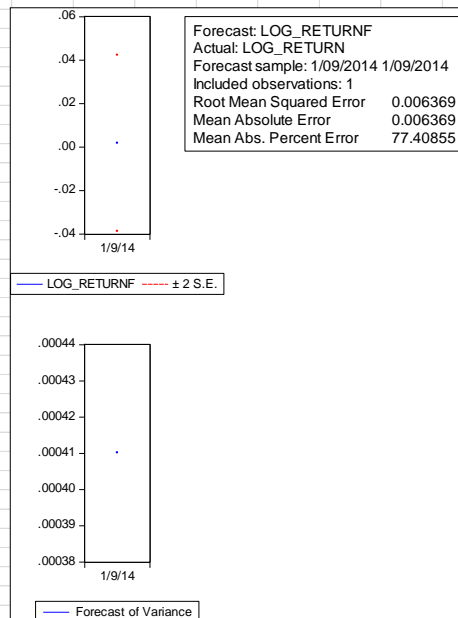
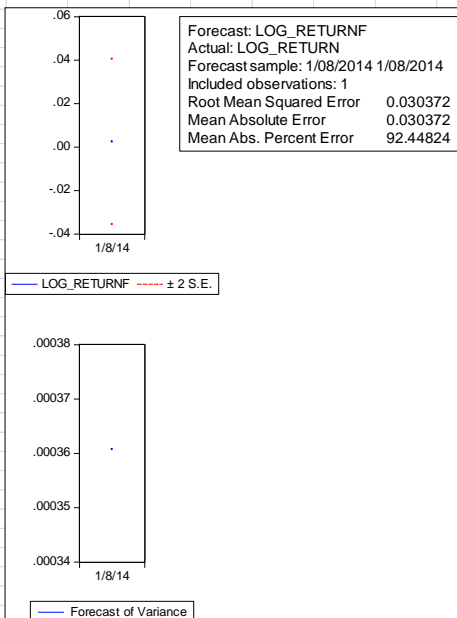
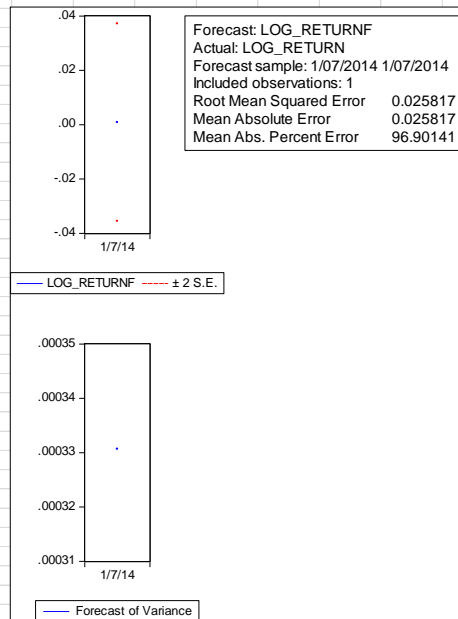
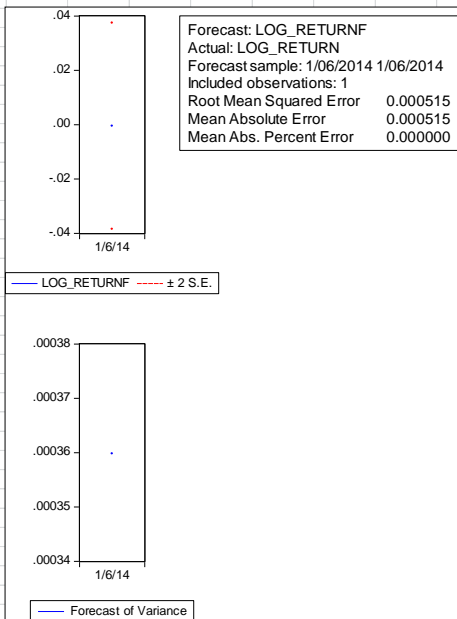
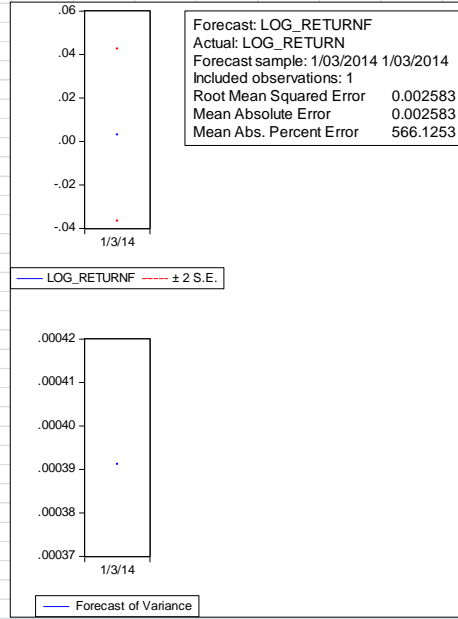
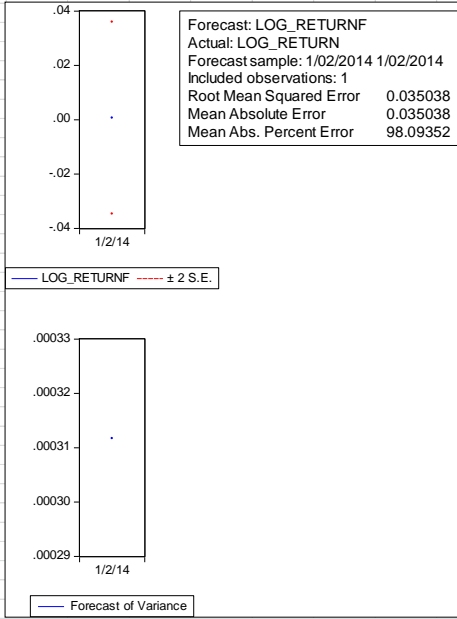
Method: Least Squares

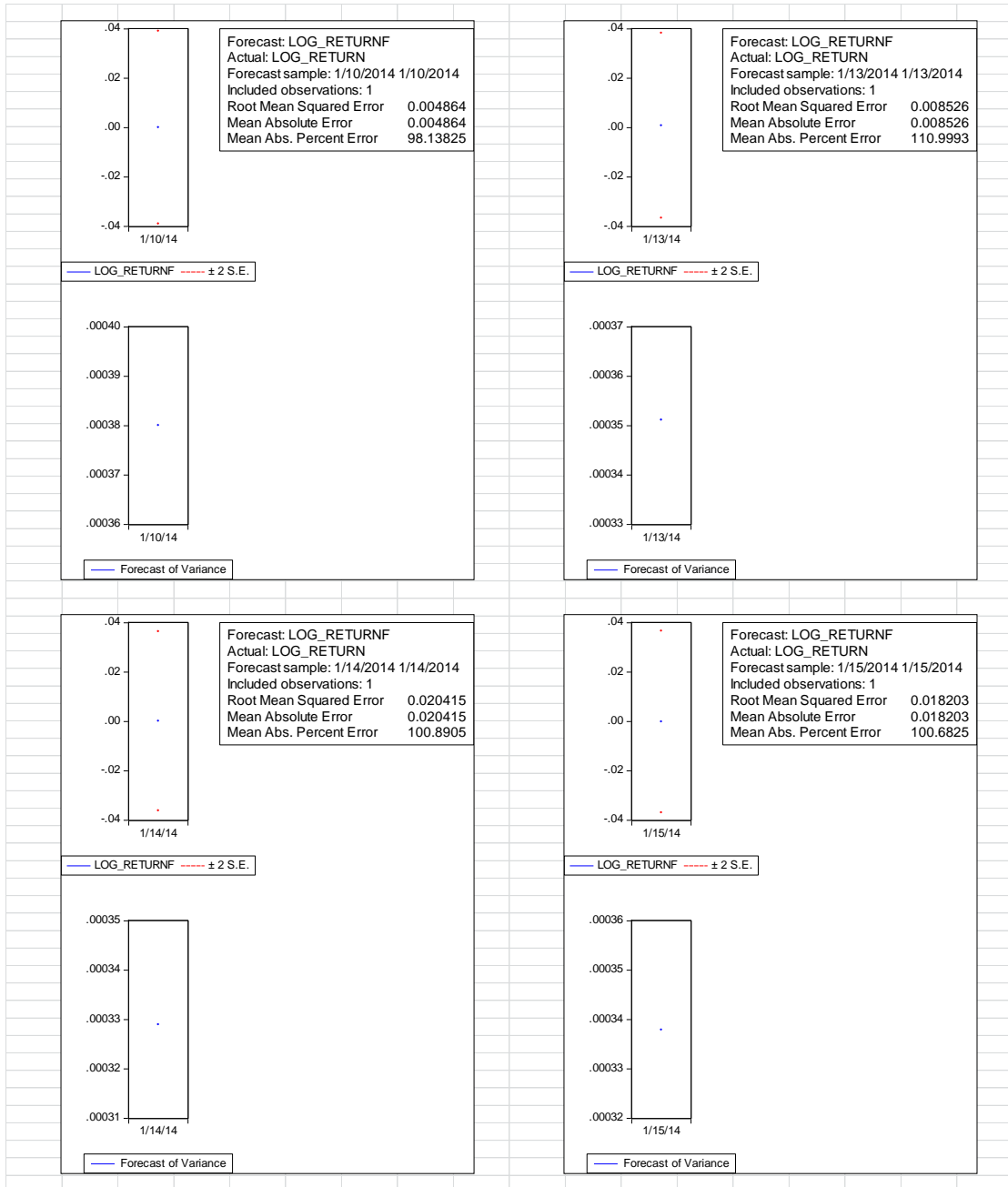
Date: 04/04/14 Time: 21:20

Sample (adjusted): 1/08/2003 12/31/2013

Included observations: 2831 after adjustments

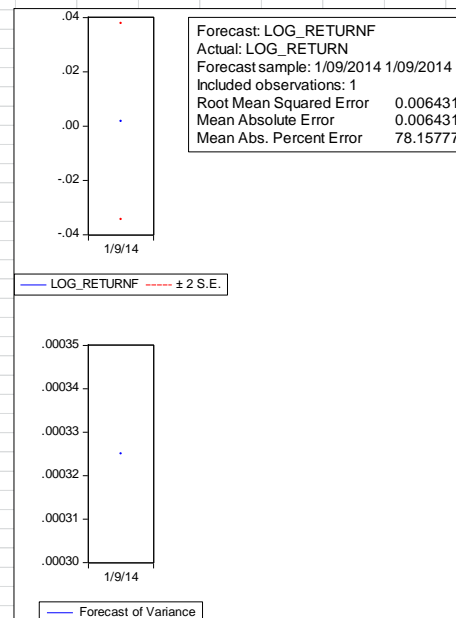
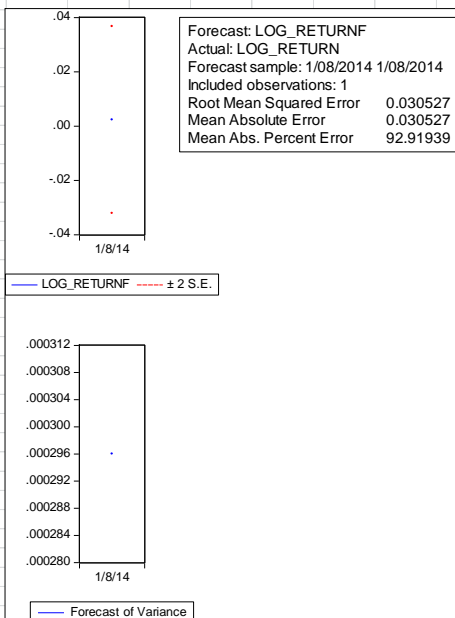
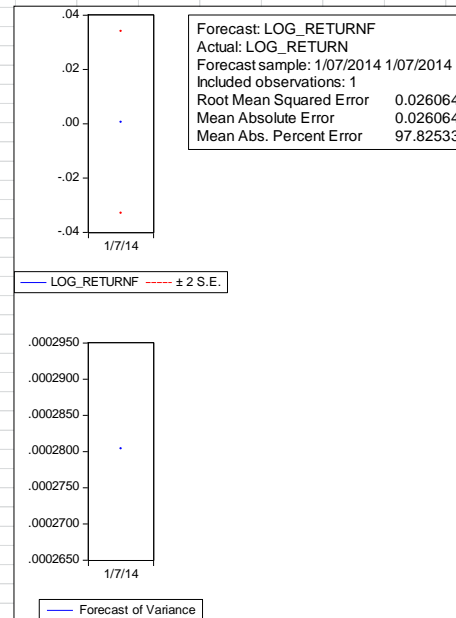
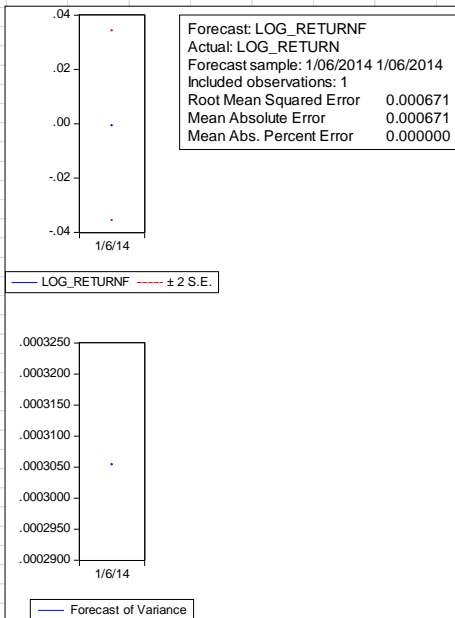
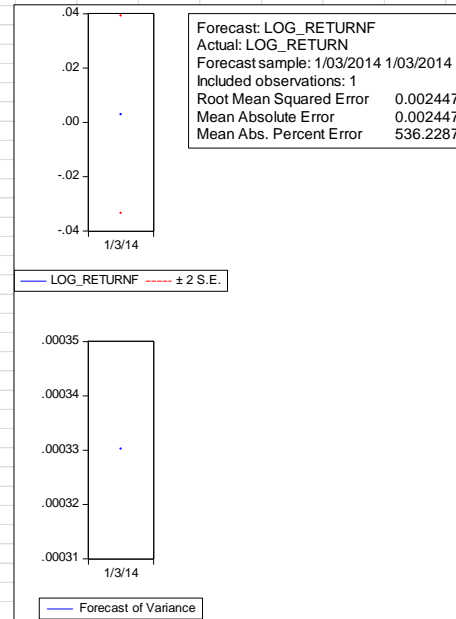
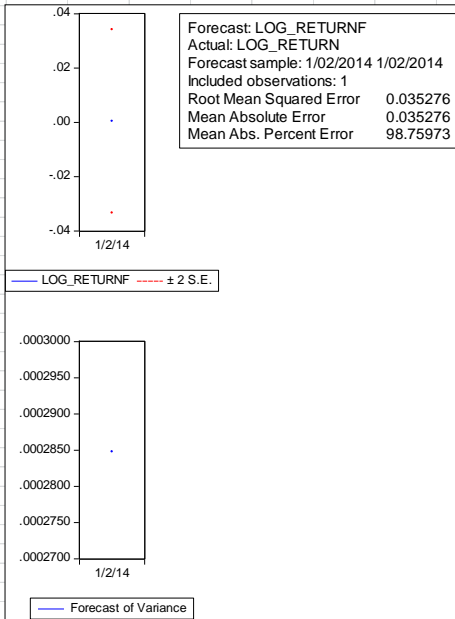
Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1.024977	0.038992	26.28698	0.0000
WGT_RESID^2(-1)	-0.025089	0.018795	-1.334866	0.1820
R-squared	0.000629	Mean dependent var		0.999891
Adjusted R-squared	0.000276	S.D. dependent var		1.818012
S.E. of regression	1.817761	Akaike info criterion		4.033795
Sum squared resid	9347.742	Schwarz criterion		4.037997
Log likelihood	-5707.837	Hannan-Quinn criter.		4.035311
F-statistic	1.781868	Durbin-Watson stat		1.998046
Prob(F-statistic)	0.182027			

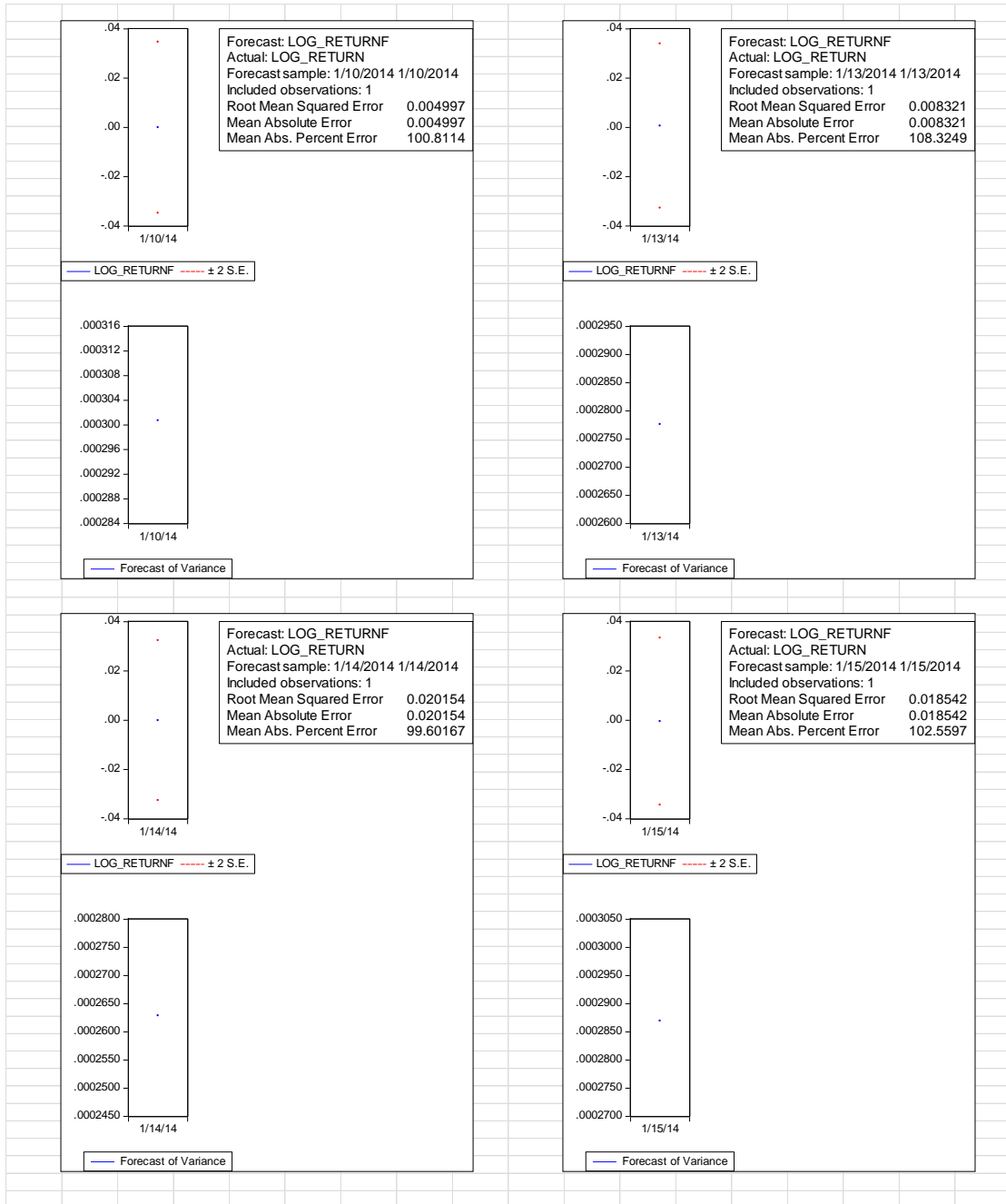




tarch







EGARCH

